No.11 2025 年 12 月 8 日

線形代数 4 演習問題

11-1. 漸化式

$$a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなるベクトル空間を V とする。$T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = 4\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \{a_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定める。

(1) V の基底 $\mathscr{B}$ を一組与えて、その基底に関する T の行列表示 A を求めよ。

(2) T は対角化可能かどうかを調べよ。

線形代数４通信　[No.11]　2025 年 12 月 8 日発行

■ 第 10 回学習内容チェックシートについて

- Q2(2) の解答として、「固有多項式 $\varDelta_A(x)$ を解く」というものが少なからずありました。多項式は解くものではありません。「固有方程式 $\varDelta_A(x) = 0$ を解く」と書いてください。
- Q2(3) は、n 次元ベクトル空間 V 上の線形変換 T の固有値 α に属する固有空間 $W(\alpha, T)$ を求めるための有効な手段を説明する問題でした。いつものように、まず、V に 1 つの基底 $\mathscr{B}$ をとり、その基底に関する T の行列表示 A を求めます。そして、A の $\mathbb{R}^n$ における α に属する固有空間 $W(\alpha, T_A)$ を求めるわけです。この時点ではまだ $W(\alpha, T)$ は求められていません。$W(\alpha, T)$ は V の中にある一方、$W(\alpha, T_A)$ は $\mathbb{K}^n$ の中にあるからです。両者を結びつけるためには、基底 $\mathscr{B}$ に関する座標系 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ が必要です。実際、$W(\alpha, T) = \Phi^{-1}\bigl(W(\alpha, T_A)\bigr)$ となっているので、連立一次方程式 $(\alpha E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて $W(\alpha, T_A)$ を求めた後、それを Φ^{-1} で写して $W(\alpha, T)$ が求められることになります。
- Q3(2) は制限写像 $T|_W$ の定義を記述する問題でした。$T|_{W(\alpha)} = \alpha\,\mathrm{id}_{W(\alpha)}$ という誤答が目立ちました。[例 10 - 3 - 2] の証明の直下の 2 行分に定義が書かれているので、該当部分をよく読み、写像の表現形式 (線形代数 4 通信 [No.6] を参照) に則り、答えてください。

■ 演習 10-1 について

(1) 出来が非常に悪かったです。“f_0, f_1, f_2” は V の基底なので、任意の $f \in V$ は

$$(*)\qquad f = af_0 + bf_1 + cf_2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

のように表わされます。このとき、$a = f(0),\ b = f'(0),\ c = f''(0)$ を示せばよいわけです。その証明は簡単で、まず $(*)$ において両辺に 0 を代入して $f(0) = (af_0 + bf_1 + cf_2)(0) = af_0(0) + bf_1(0) + cf_2(0) = a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 = a$ が得られます。次に、$(*)$ の両辺を微分してから 0 を代入して $b = f'(0)$ が得られ、$(*)$ の両辺を 2 回微分してから 0 を代入して $c = f''(0)$ が得られます。

(2) の行列表示は (1) の等式を用いて求めることができます。(1) の等式により、$f \in V$ に対して $D(f)$ は $D(f) = f' = f'(0)f_0 + f''(0)f_1 + f'''(0)f_2$ のように表わされます。$f \in V$ は微分方程式 $f''' + 6f'' + 12f' + 8f = 0$ を満たすので、$f'''(0) = -6f''(0) - 12f'(0) - 8f(0)$ が成立します。これを用いて、$f = f_0, f_1, f_2$ として順次 $D(f)$ を計算すると、

$$D(f_0) = -8f_2,\ D(f_1) = f_0 - 12f_2,\ D(f_2) = f_1 - 6f_2$$

がわかるので、求める行列表示 A は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

であることがわかります。

(3) D の固有値は、(2) で求めた行列表示 A の固有値を求めれば求められます。計算すると $\varDelta_D(x) = \varDelta_A(x) = (x+2)^3$ となるので、D の固有値は -2 のみであり、その重複度は 3 です。

■ 次回予告

次回は、固有値･固有ベクトルに関する 2 つの重要な定理—Frobenius の定理と Cayley-Hamilton の定理—を学びます。いずれの定理も、線形変換の多項式に関わる定理です。

線形代数４・第 11 回 (2025 年 12 月 8 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。