No.11 2026 年 6 月 18 日

# 数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

**11-1**. $a > 0$ とする。

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(-a < x < a)$ の導関数を求めよ。但し、$\mathrm{Sin}^{-1}$ は $\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表わす。

(2) $x \in (-a, a)$ に対して、等式

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

が成り立つことを示せ。

**11-2**. 関数 $f(x) = 4x\sqrt{x} + \sin 3x \cos 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ について以下の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法公式を用いて、$\sin 3x \cos 2x$ を $c(\sin \alpha x + \sin \beta x)$ $(c, \alpha, \beta$ は定数) の形に書き換えよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ を計算せよ。

# 数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.11]

2026 年 6 月 18 日発行

## ■ 第 10 回学習内容チェックシートについて

- Q1(2) については、「各 $x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を分割の分点と呼び、$|\Delta| = \cdots\cdots$」という解答が多かったです。分点は尋ねていませんし、$|\Delta|$ の定義にも必要ないので、波線部分は消してください。その上で、設問では分割 $\Delta$ を具体的に表わしていないので、$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ とするとき、と先に書いておく必要があります。
- Q2(2) は定積分の定義を説明する問題です。$[a, b]$ の分割を細かくしていったときのリーマン和の極限という、ざっくりしすぎている解答が多かったです。ここでのリーマン和を具体的に書くと $S(f; \Delta^{(N)}, \xi^{(N)})$ になりますが、$\Delta^{(N)}$ と $\xi^{(N)}$ が何なのかの説明が必要になります。そこで、「$[a, b]$ の分割を幅が 0 に収束するように細かくしていったときの、それらの分割にフィットする有限数列を任意にとって作られるリーマン和からなる実数列の極限として定義される」のように書くとよいでしょう。
- Q3(1) はリーマン和、不足和、過剰和がそれぞれどんな図形の面積を表わすのかを図示する問題でした。該当部分に「影（斜線）」をつけましょう。また、リーマン和については、フィットする有限数列をどこにとったのかを図に含めてください。

## ■ 演習 10-1 について

よくできていました。(1) においては、定義に従い、$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{it}{n}\right)\left(\frac{it}{n} - \frac{(i-1)t}{n}\right)$ を計算します。ここで、$\frac{it}{n} - \frac{(i-1)t}{n} = \frac{t}{n}$ となり、$i$ によらない値になることがポイントです。これに注意して計算すると、$S(f; \Delta, \xi) = \frac{(n+1)t^2}{2n}$ が得られます。(2) においても、$\Delta$ が $[0, \pi]$ を $n$ 等分したものであるため、リーマン和は $S(f; \Delta, \xi) = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i\pi}{n}\right)$ となります。これが $R = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{3i\pi}{n}\right)$ に一致するには、すべての $i$ に対して $f\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{3i\pi}{n}\right)$ であればよいので、そのような連続関数として $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$ $(x \in [0, \pi])$ を見出すことができます。

## ■ 演習 10-2 について

(1) では、グラフを考えずに、単に式に当てはめてしまったのでしょう。$S_\Delta(f)$ と $s_\Delta(f)$ が逆転している解答が複数ありました。関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in [1, 3])$ は減少関数のため、過剰和は $S_\Delta(f) = f(1)\left(\frac{4}{3} - 1\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)\left(2 - \frac{4}{3}\right) + f(2)\left(\frac{8}{3} - 2\right) + f\left(\frac{8}{3}\right)\left(3 - \frac{8}{3}\right)$ によって与えられ、これを計算すると、$S_\Delta(f) = \frac{31}{24}$ となります。同様に、不足和は $s_\Delta(f) = \frac{17}{18}$ となることがわかります。

(2) は、連続関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ に対して、不等式 $s_\Delta(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_\Delta(f)$ が成り立つので、これに (1) の結果を当てはめれば、答えがすぐに求まります。なお、この問題の関数 $f$ については、$\leq$ を $<$ に置き換えた真の不等号が成立しますが、それを示すには別途議論が必要なため、敢えて $\leq$ のままにしておくのが正解です。

## ■ 次回予告

次回は部分積分法と置換積分法を学びます。この 2 つの積分法により、積分を実際に計算できる関数が飛躍的に増えます。この 2 つの積分法の導出過程を示し、その使い方を学びます。

**数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 11 回 (2026 年 6 月 18 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。