数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

11-1. 次の各積分の値を求めよ。

(1) $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4,\ 2x + 1 \leq y \leq 2x^2 + x\ \}$ のとき、$\displaystyle\int_D \frac{x}{(y-x)^2}\,dxdy$

(2) $D = \left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 1 \leq x \leq \sqrt{5},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\log x\ \right\}$ のとき、$\displaystyle\int_D x^2 e^{2xy}\,dxdy.$

11-2. $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\ -x^2 + y^2 \leq 2\ \}$ とおく。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。

但し、D の面積の計算において、次の公式を使ってよい。定数 $a > 0$ に対して

$$\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right) + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎２)通信　[No.11]

2025 年 12 月 3 日発行

■ 第 10 回の学習内容チェックシートについて

- ∘ Q1 の第 1 項目の設問はリーマン和 $S(f;\Delta,\boldsymbol{\xi})$ の定義式を書く問題でした。その式自体は書けているシートが多かったのですが、$\mu(R_{ij})$ の定義が書かれていないものが殆どでした。但し書きとして、$\mu(R_{ij})=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ を書き添えてください。
- ∘ Q1 の第 2 項目の 1 番目の枠に「積分可能」と書き入れたシートが複数ありましたが、「連続」と書いてください。その次の枠に「断面積の和」「R の面積」「ある値 γ」などと書き入れたシートがやはり複数ありましたが、この枠には「リーマン和」が入ります。
- ∘ Q2 は長方形領域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ の重積分を計算するための方法を答える問題でした。「1 変数関数の定積分を 2 回計算する」という解答がありました。間違いではありませんが、その計算公式 [（定理 10-6-1] の公式）を含めて、重積分の計算方法を説明してください。

■ 演習 10-1 について

この問題はよくできていました。リーマン和の定義により

$$S(f;\Delta,\boldsymbol{\xi})=\sum_{i,j=1}^{N}f(\xi_{ij})\mu(R_{ij})=\sum_{i,j=1}^{N}f\Big(\frac{i}{N},\frac{j}{N}\Big)\Big(\frac{i}{N}-\frac{i-1}{N}\Big)\Big(\frac{j}{N}-\frac{j-1}{N}\Big)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{i}{N}\Big(\log\frac{j}{N}\Big)\frac{1}{N^2}=\frac{1}{N^3}\Big(\sum_{i=1}^{N}i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N}\log\frac{j}{N}\Big)$$

となります。あとは i に関する和と j に関する和をそれぞれ計算するだけです。i に関する和は等差数列の和の公式を用いて、j に関する和は公式 $\log x+\log y=\log(xy)$ を用いて計算し、$S(f;\Delta,\boldsymbol{\xi})=\dfrac{N+1}{2N^2}\log\Big(\dfrac{(N-1)!}{N^{N-1}}\Big)$ となることがわかります。

■ 演習 10-2 について

重積分の計算問題の答えを書く際に $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$ から書き出す人が多かったですが、それはダメです。$\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\,dxdy$ から書き始め、それを $\displaystyle\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx$ のように 1 変数関数の積分に書き換える、という手順で解答してください。その際、$\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ を括弧でくくることも重要です。重積分 $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]}$ と、1 変数関数として積分を 2 回繰り返す累次積分 $\displaystyle\int_a^b\int_c^d$ は結果として等しくなるのであって、端(はな)から等しいのではありません。重積分を 1 変数関数の積分に書き換えて計算するんだ、という意識を強く持って解答してください。

計算結果のみ記しておくと、(1) は $-\dfrac{11}{3}$ になり、(2) は $-2(e^2-e^{-2})$ になります。

■ 次回予告

縦線領域や横線領域とは限らない有界閉領域上での重積分を計算するには、変数変換を行い、領域を縦線領域や横線領域に直してから計算します。次回は、変数変換の中でも最も基本的な一次変換による重積分の変数変換公式を導き、その計算方法を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 11 回 (2025 年 12 月 3 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。