

基礎数学演義3 第12回・問題解答&要約シート(1)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q12-1. 閉区間 $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_3 = [a_3, b_3]$ は $a_1 < a_3 < a_2 < b_1 < b_3 < b_2$ を満たしているとする。集合 $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ を数直線上に図示し、さらに、 $\{x \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc\}$ の形で表わせ。

[図示]

[集合の記号を用いた表記]

Q12-2. (1) 閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して、集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ はどのような実数 x の全体からなる集合か。 $\{x \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc\}$ の形で表わせ。

(2) 閉区間の列 $I_n = \left[-n, \frac{1}{n}\right]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ。

Q12-3. (1) アルキメデスの公理を用いて、任意の $x > 0$ に対して、 $x \notin \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することを示せ。

(2) (1) を用いて $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ となることを示せ。

基礎数学演義3 第12回・問題解答&要約シート(2)

学籍番号 _____ 氏名 _____

Q12-4. (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界とは何か。定義を述べよ。(2) 数列 $\{5^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界か否かを調べ、上に有界な場合には上界の例を3つ以上挙げよ。Q12-5. (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限とは何か。定義を述べ、それをどのような記号で表わすのかを答えよ。(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限はどのような条件が満たされれば存在するか。Q12-6. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + 3)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。(1) 「 $1 \leq a_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq a_{n+1} \leq 3$ 」が成り立つことを示せ。(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少列であることを示せ。(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを確認し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。