

## 基礎数学演義3 第12回・問題解答&amp;要約シート(1)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q12-1. 閉区間  $I_1 = [a_1, b_1]$ ,  $I_2 = [a_2, b_2]$ ,  $I_3 = [a_3, b_3]$  は  $a_1 < a_3 < a_2 < b_1 < b_3 < b_2$  を満たしているとする。集合  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$  を数直線上に図示し、さらに、 $\{x \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc\}$  の形で表わせ。

[図示]

[集合の記号を用いた表記]

Q12-2. (1) 閉区間の列  $I_n = [a_n, b_n]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) に対して、集合  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  はどのような実数  $x$  の全体からなる集合か。 $\{x \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc\}$  の形で表わせ。

(2) 閉区間の列  $I_n = \left[-n, \frac{1}{n}\right]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) に対して、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  を求めよ。

Q12-3. (1) アルキメデスの公理を用いて、任意の  $x > 0$  に対して、 $x \notin \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$  を満たす  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在することを示せ。

(2) (1) を用いて  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$  となることを示せ。

## 基礎数学演義3 第12回・問題解答&amp;要約シート(2)

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

Q12-4. (1) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上界とは何か。定義を述べよ。(2) 数列  $\{5^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$  は上に有界か否かを調べ、上に有界な場合には上界の例を3つ以上挙げよ。Q12-5. (1) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上限とは何か。定義を述べ、それをどのような記号で表わすのかを答えよ。(2) 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  の上限はどのような条件が満たされれば存在するか。Q12-6.  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + 3)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定義される数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を考える。(1) 「 $1 \leq a_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq a_{n+1} \leq 3$ 」が成り立つことを示せ。(2)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は単調減少列であることを示せ。(3)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は収束することを確認し、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。