

線形代数 1 演習問題

12-1. (ガウスの消去法)

連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ 2x + 7y + 10z = 6 \\ 4x + 15y + 22z = 8 \end{cases}$$

の実数解を、ガウスの消去法により、求めよ。

12-2. (連立一次方程式の基本解)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $\text{rank } A$ を求めよ。

(2) A を係数行列とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持つか？非自明な解を持つ場合には、その連立一次方程式の基本解を 1 組求めよ。

■ 第 11 回の学習内容チェックシートについて

- Q1 では、階数の欄に A から H までの階数を、標準形の欄に A から H までの標準形をそれぞれ順に書き並べた人が結構いました。これでは、行列を階数によってグループ分けするという視点がぼやけてしまいます。ここで作って欲しかった表は、下のような表です。

階数	0	1	2	3
標準形	ここに階数 0 の 3 次正方行列の標準形を書く	以下同様		
行列	ここに A から H の中で、階数 0 の行列を列挙する	以下同様		

今回説明したように、 (m, n) -行列 A, B が同じ階数を持っていると、連立一次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ と $Bx = \mathbf{0}$ の解集合は、どちらも基本解が同じ個数のベクトルからなるという意味で似た構造を持っています。これが階数を知ることの大きな意義になります。

- Q3 の答案として「行基本変形と列基本変形を有限回施す」としか書いていないものが多数ありました。与えられた行列にまずどんな操作を施して、どんな形の行列に変形し、その後でどんな操作を施して標準形にしていきますか？その手順を書くようにしてください。

■ 演習 11-1 について

① $\times 2 +$ ②, ① $\times (-4) +$ ③ を行なった後、② $\times (-5) +$ ③ を行くと、階段型行列 $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られ、 $\text{rank } A = 2$ とわかります。さらに、② \leftrightarrow ③ を行ってから、pre11-1(2) のように順次列基本変形を行うことで、標準形 $F_{3,4}(2)$ にすることができます。

行列に基本変形を施しているにも関わらず、等号 $=$ で結んでいる人が出始めました。行列は数を長方形の形に並べた「表」なので、どこか一部が違えば違う行列です。行列に基本変形を施すと、その前後で違った表になるため、**行列の基本変形の下では、等号 $=$ ではなく矢印 \rightarrow を用います。**一方、行列式の実体はある規則に則って計算される数または式なので、見かけは異なっても計算により出てくる最終的な値や式は同じです。そのため、**行列式の計算では等号 $=$ を用います。**行列と行列式の変形・計算とで、記号を適切に使い分けてください。

■ 演習 11-2 について

まず、行列式 $|A|$ を計算します。最初に第 1 列から a をくくり出した後、第 1 行の -1 倍を第 2 行、第 3 行、第 4 行にそれぞれ加えて、第 1 列に関して余因子展開します。その後、第 3 行に関して余因子展開して、 $|A| = a(a-2) \begin{vmatrix} a-2 & 2 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} = a^2(a-2)(a-4)$ が求まります。これより、 $a \neq 0, 2, 4$ のとき、 $|A| \neq 0$ となるので、 $\text{rank } A = 4$ がわかります。 $a = 0, 2, 4$ のときには、個別に行基本変形を施して A を階段型に変形することで $\text{rank } A = 3$ がわかります。

■ 次回予告

今回は、ベクトルが一次独立であることの幾何学的な意味と、ベクトルが一次独立か否かを行列の階数を調べることにより判定する方法を学びます。

線形代数1・第12回(2024年6月27日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。