No.12　　2026年6月25日

線形代数 1 演習問題

12-1. (一次独立性の階数を用いた判定)

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 14 & 5 & 18 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A の列ベクトルの中で一次独立となるものの組を考えたとき、その組に含まれるベクトルの個数の最大値を求めよ。さらに、そのような組を 1 組与えよ。

12-2. (行列の階数と一次独立性)

次の 3 次列ベクトルの組は一次独立か、一次従属かを判定せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが一次従属であった場合には、$s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + u\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす同時には 0 でない実数 s, t, u を 1 組見つけよ。

線形代数１通信　[No.12]　2026 年 6 月 25 日発行

■ 第 11 回学習内容チェックシートについて

- ◦ 今年度は、Q1 の 1 番目の問いの出来が悪いです。$\mathbb{R}^n$ 自身は、(11-1a) で与えられているように、n 次列ベクトルの全体からなる集合であり、解答欄にはこれだけを記せば OK です。但し、線形代数においては $\mathbb{R}^n$ を単なる集合ではなく、和とスカラー倍を備えた集合として扱っていきます。それが (n 次元) 数ベクトル空間の概念です。
- ◦ Q1 の 2 番目の問いに、「$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を必ず解に持つこと」と解答した人がいましたが、問われているのは自明な解自身のことですから、「連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が常に持っている $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ という特別な解のこと」のように書いてください。なお、ここの $\mathbf{0}$ は成分がすべて 0 のベクトルを表わしているので、単に 0 と書くのはダメです。
- ◦ Q2 の 5 番目の枠に「一次結合」と書き入れたシートがいくつかありましたが、不適切です。この枠に書き入れるべき文字は「一次独立」です。
- ◦ Q2 の 6 番目の枠には (11-3d) を書き入れてください。“$(t_1, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$” がないシートが多数ありましたが、「但し書き」として書き添える必要があります。

■ 演習 11-1 について

与えられた連立一次方程式の拡大係数行列に行基本変形を施して階段型にし、それを連立一次方程式に戻すと $\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$ となります。これを後退代入で解きます。第 2 式の 2 つの変数のうち、ここでは z を決めることにし、$z = t$ $\underline{(t \in \mathbb{R})}$ とおきます。すると y が $y = 2t-4$ と決まります。これらを第 1 式に代入して x を求め、実数解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{(t \in \mathbb{R})}$ が得られます。2 つの波線部分は必要です。略すことはできません。

■ 演習 11-2 について

(1) は、A に ①×(−2)+②, ①×(−1)+③ を行なってから ②×(−4)+③ を行うと、階段行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ になるので、$\operatorname{rank} A = 2$ がわかります。

(2) まず、$\operatorname{rank} A = 2 < 4 = (A$ の列数$)$ より、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持ちます。$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことと $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことは同値なので、$\mathbf{x}$ を成分で表わして、

$$\begin{cases} x - y + 5z + 3w = 0 & \cdots\cdots\cdots❶ \\ \phantom{x - {}} y - 2w = 0 & \cdots\cdots\cdots❷ \end{cases}$$

を解けばよいことになります。❷に注目し、$w = t$ $(t \in \mathbb{R})$ と定めると $y = 2t$ と決まり、❶に代入して $x + 5z = -t$ が得られます。さらに、$z = s$ $(s \in \mathbb{R})$ と定めると $x = -5s - t$ に決まります。こうして、実数解

$$\mathbf{x} = s\underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{①} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{②} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

が求まります。問われているのは基本解ですから、下線の引かれた①, ②のベクトルを並べて “ ” で括ったものを答えとしなければなりません。

■ 次回予告

次回は、これまで学んできたことの応用として、固有値問題を取り上げます。

線形代数１・第 12 回 (2026 年 6 月 25 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。