No.12 2024年12月12日

線形代数 2 演習問題

12-1. (線形写像)

$F: V \longrightarrow U$, $G: U \longrightarrow W$ を線形写像とする。合成写像 $G \circ F: V \longrightarrow W$ もまた線形写像であることを示せ。

12-2. (線形写像の行列表示)

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を 2 次正方行列全体のなすベクトル空間とし、写像 $T: \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ を

$$T(X) = \frac{1}{8}(3X - 5X^{\mathrm{T}}) \qquad (X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$$

により定める。

(1) T は線形変換であることを確かめよ。

(2) $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の基底を一組与え、その基底に関する T の行列表示を求めよ。

線形代数２通信 [No.12]

2024 年 12 月 12 日発行

■ 第 11 回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q1 の表の 1 番目について、$v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$ $(t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R})$ のように表わされることや表わされるときという解答が多かったです。「こと」や「とき」では正しく定義が書けているとは言えません。“$v_1, \cdots, v_k$” の一次結合とは、$v = t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$ $(t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R})$ と表わされるベクトル v のことを指しているからです。
- ◦ Q3 は、漸化式 $a_{n+3} + 3a_{n+1} + 4a_n = 0$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなるベクトル空間 V の次元と一組の基底を与える問題です。問題の趣旨を勘違いして、漸化式を解いたものが少なからずありましたが、その必要はありません。与えられた漸化式を $a_{n+3} = -3a_{n+1} - 4a_n$ と書き換えて、n に $1, 2, 3, \cdots$ を代入していくことにより、どんな項も a_1, a_2, a_3 を使って表わされることがわかります。最初の 3 項の与え方は自由ですから、V は $\mathbb{R}^3$ と同じ 3 次元であると推察できます。そして、この考察から、V の基底として最初の 3 項がのように与えられる V の元の列 “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” を見いだすことができます。

$$\boldsymbol{e}_1 = “1, 0, 0, \cdots\cdots” \qquad \boldsymbol{e}_2 = “0, 1, 0, \cdots\cdots” \qquad \boldsymbol{e}_3 = “0, 0, 1, \cdots\cdots”$$

各 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は数列なので数が無限に続くため、“$\cdots\cdots$” が必要です。さらに、「第 4 項以降は与えられた漸化式を使って帰納的に定義する」等の説明を付けてください。

■ 演習問題 11-1 について

授業で詳しく説明したのに、書き出しがよくない解答が複数枚ありました。まず、$t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ として**関数としての等式** $t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 = 0_V$ $\cdots(*)$ を立てるところから始めます。ここで、0_V は $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ における零ベクトル、すなわち、$0 \in \mathbb{R}$ への定数関数です。次に、関数としての等式 $(*)$ に $x \in \mathbb{R}$ を代入して、**実数としての等式** $t_1e^x + t_2\cos x + t_3\sin x = 0$ に移行します。この x に具体的な数値を 3 つ代入して連立一次方程式を立てて解くのですが、代入する x の値によって連立一次方程式の解きやすさが変わってきます。できるだけ簡単な式になるような値がよいので、$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ を代入してみましょう。すると、$t_1 + t_2 = 0,\ e^{\frac{\pi}{2}}t_1 + t_3 = 0,\ e^{\pi}t_1 - t_2 = 0$ が得られ、これを連立させて解いて、$t_1 = t_2 = t_3 = 0$ を導くことができます。

■ 演習問題 11-2 について

(1) は pre11-2 の「ヒントと略解」で解答を略した (SS2) のチェックができていない答案が多かったです。(SS2) では、任意に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ と $t \in \mathbb{R}$ をとるところから始めて、$t\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ta_n\}_{n=1}^{\infty}$ が W に属することを導きます。そのためには、$a_{n+3} + 7a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n = 0$ から $ta_{n+3} + 7(ta_{n+2}) + 7(ta_{n+1}) + ta_n = 0$ を導けばよいわけです。

(2) 与えられた漸化式を $a_{n+3} =$ の形に書き換えることで、どんな項も a_1, a_2, a_3 を使って表わされることがわかります。これより、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を最初の 3 項がそれぞれ次のように与えられる W の元と定めると、“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” は W の基底をなし、$\dim W = 3$ であることがわかります。

$$\boldsymbol{e}_1 = “1, 0, 0, \cdots\cdots” \quad \boldsymbol{e}_2 = “0, 1, 0, \cdots\cdots” \quad \boldsymbol{e}_3 = “0, 0, 1, \cdots\cdots”$$

“$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” が W の基底となる理由を、pre11-2 のヒントと略解のように、書き添えてください。

■ 次回予告

次回は、基底を指定することでベクトル空間における諸問題を数ベクトル空間の問題に置き換えて解決するための枠組みとして、座標系の概念を学びます。

線形代数２・第 12 回 (2024 年 12 月 12 日) 演習問題解答シート

学　籍　番　号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏　名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。