

線形代数 3 演習問題**12-1. 方程式**

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 20 = 0$$

によって与えられる 2 次曲線 M の標準形を求めよ。さらに M の概形を (x, y) -座標平面上に描け。

■ 演習 11-1 について

(1) 条件を満たす対称行列は $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 6 \\ -6 & 4 & -12 \\ 6 & -12 & 4 \end{pmatrix}$ です。

(2) 固有多項式が計算できなかった人が数名いましたが、第 2 行の 1 倍を第 3 行に加えたのち、第 3 行から $x+8$ をくくり出せば難なく、固有多項式の因数分解 $\Delta_A(x) = (x+8)^2(x-19)$ が得られます。よって、 A の固有値は $-8, 19$ です。

(3) 事前練習用演習問題とは違い、この問題では固有ベクトルからなる正規直交基底を求める必要はありません。 $X = \sqrt{2}x, Y = \sqrt{2}y, Z = \sqrt{2}z$ とおくと、 $2(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ は

$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ と書き換えられ、この条件の下で $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}R(A; \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix})$ となります。

レイリー商の最大値と最小値はそれぞれ最大固有値と最小固有値により与えられるため、 $2(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ の下での q の最小値は $\frac{1}{2} \cdot (-8) = -4$ とわかります。

■ 第 11 回学習内容チェックシートについて

○ Q3(1) は $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次形式の一般形を書く問題でしたが、具体形を挙げた人が多かったです。また、 $\mathbb{R}^3$ 上ではなく $\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式を答えた人も複数名いました。解答欄には、[定義 11-2-1] に書かれている等式を $n=3$ の場合を書いていけばよいのですが、添字がうるさいと感じるのであれば、

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ は定数})$$

のように書くこともできます。

(2) は (1) の解答に応じた一般形を記入しなければなりません。(1) の答えを上記のようにした場合には、 A の成分は a, b, c, d, e, f を使って表わすことになりますが、対角成分以外は $\frac{1}{2}$ 倍しなければならないことに注意しましょう。

○ Q4 の解答欄に、計算過程が書かれているシートが複数ありましたが、結論のみを書きます。印刷されている $=$ の横に $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ と書いた後、 λ_i の説明を付記してください。

○ Q5(2) の分子は、2 次正方行列と 2 次元ベクトルの積の単純な計算で求められますが、 A に d が含まれていないのに d が入っているなど、できていないものが少なからずありました。

○ Q5(4) は、単に式を書くだけでなく、固有ベクトルを用いた文章で答えましょう。「それぞれ A の最大固有値・最小固有値に属する固有ベクトルである」と書くといいでしょう。

■ 訂正

アブストラクト 85 ページ「ヒントと略解」の中の $\mathbf{p}_1$ の第 2 成分が -1 になっていましたが、正しくは 1 の誤りです。すでに HP 上の pdf ファイルは修正版に差し替えましたが、授業前に印刷した人や pdf ファイルをダウンロードした人は各自で修正をお願いします。

■ 次回予告

今回は、今回の話の曲面版である、楕円面や双曲面などの 2 次曲面とその標準形について学びます。

線形代数 3・第 12 回 (2025 年 6 月 30 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。