2025 年 12 月 15 日

線形代数 4 演習問題

12-1. 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -7 & 5 & 9 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) Cayley-Hamilton の定理を利用して、A^3 を求めよ。

(2) Cayley-Hamilton の定理を利用して、A の逆行列を求めよ。

(3) 任意の整数 n に対して A^n の固有値を求めよ。

(4) $A^3 - 5A^2 - 2A + 24E_3$ の固有値を求めよ。

線形代数 4 通信 [No.12] 2025 年 12 月 15 日発行

■ 訂正

第 11 回の事前練習用演習問題のヒントと略解がひどく間違っていました。ホームページ上の pdf ファイルを修正・加筆しましたので、新しいものに差し替えをお願いします。このミスは授業終了直後の学生からの問い合わせにより気がつきました。その学生に感謝すると同時に、皆さんに混乱させてしまったことをお詫びします。

■ 演習 11-1(1) について

出来が悪かったです。数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と一般項 a_n をごっちゃにしている人が (いまだに) 多いです。$T(a_1)$ という書き方をしている人がいますが、定義より T の後ろの括弧に入れることができるのは (与えられた漸化式を満たす) 数列のみです。

V の基底を見つける方法は何度も説明しているように、与えられた漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は最初の 3 項 a_1, a_2, a_3 によって決まるので、V の基底として

$\boldsymbol{e}_1 =$ “$1, 0, 0, \ \ 4, -12, \cdots\cdots$” (第 4 項以降は与えられた漸化式により帰納的に定義)

$\boldsymbol{e}_2 =$ “$0, 1, 0, \ \ 0, \ \ \ 4, \cdots\cdots$” (同上)

$\boldsymbol{e}_3 =$ “$0, 0, 1, -3, \ \ \ 9, \cdots\cdots$” (同上)

からなる列 “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” を見いだすことができます。

次に、基底 $\mathscr{B} =$ “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$”に関する行列表示 A を求めます。任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ と表わされることに注意すると、

$$\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = a_2\boldsymbol{e}_1 + a_3\boldsymbol{e}_2 + a_4\boldsymbol{e}_3 = a_2\boldsymbol{e}_1 + a_3\boldsymbol{e}_2 + (-3a_3 + 4a_1)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\{a_{n+2}\}_{n=1}^{\infty} = a_3\boldsymbol{e}_1 + a_4\boldsymbol{e}_2 + a_5\boldsymbol{e}_3 = a_3\boldsymbol{e}_1 + (-3a_3 + 4a_1)\boldsymbol{e}_2 + (9a_3 + 4a_2 - 12a_1)\boldsymbol{e}_3$$

が得られるので、$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = (4a_2 + a_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_3 + 4a_1)\boldsymbol{e}_2 + (-3a_3 + 4a_2 + 4a_1)\boldsymbol{e}_3$ が成り立ちます。これを用いて

$$T(\boldsymbol{e}_1) = 4\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3, \quad T(\boldsymbol{e}_2) = 4\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_3, \quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$$

がわかり、行列表示 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ を得ることができます。

■ 演習 11-1(2) について

T の固有多項式は、計算により $\Delta_T(x) = \Delta_A(x) = (x+4)^2(x-5)$ となるので、T の固有値は $-4, 5$ です。よって、$\dim W(-4) + \dim W(5)$ が $\dim V = 3$ に一致すれば対角化可能であり、そうでなければ不可能ということになります。各固有値 $\alpha = -4, 5$ に対して $\dim W(\alpha)$ は $3 - \mathrm{rank}(\alpha E_3 - A)$ によって求められるので、$\mathrm{rank}(\alpha E_3 - A)$ を計算します。行基本変形を施して階段型にすることにより、$\mathrm{rank}(-4E_3 - A) = 1$, $\mathrm{rank}(5E_3 - A) = 2$ がわかります。したがって、$\dim W(-4) = 3 - 1 = 2$, $\dim W(5) = 3 - 2 = 1$ となり、$\dim W(-4) + \dim W(5) = 3 = \dim V$ が得られます。この等式から、T は対角化可能であるという結論を得ることができます。

■ 次回予告

次回は Jordan 標準形を得るための一つ手前として、固有空間を一般化した広義固有空間の概念を導入します。有限次元ベクトル空間 V 上の三角化可能な線形変換に対して、V はいつでも広義固有空間の直和に分解されることを示します。

線形代数4・第12回 (2025年12月15日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。