No.12 2026 年 6 月 25 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

12-1. (1) 定積分 $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 4} \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\,dx$ を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log(\sqrt{x}+1)\,dx$ を求めよ。

12-2. n を 0 以上の整数として、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく。

(1) 部分積分法により、漸化式

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

を導け。

(2) I_6 を求めよ。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.12]

2026 年 6 月 25 日発行

■ 第 11 回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q2 の 4 番目の枠に、0 と書き込んだシートが複数ありました。2 つの原始関数の差は 0 ということはなく、定数となります (アブストラクトの p.65，下から 4 行目を参照)。
- ◦ Q2 の最後の枠の解答の中に、0 や $F(x)$ などがありました。この問題では、$F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ を微分すると関数 $f(x)$ が得られるという設定ですから、関数 $F(x)$ は関数 $f(x)$ の原始関数です。一般に、**原始関数がわかれば定積分の値は公式 (11 - 6 a) を用いて計算することができます**。今の場合、$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1)$ となり、$\mathrm{Tan}^{-1}(1)$ と $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)$ がわかれば計算できます。これらの値を求めて、差の値を記入してください。
- ◦ Q3 は定積分を実際に計算するにはどうすればよいか、その解決方法・方針を書く問題です。「$f(x)$ を積分して」という表現を用いた人が何人かいました。関数の積分は、前回説明したように、区間の分割の幅を細かくしていったときのリーマン和からなる数列の極限により定義されており、その定義から積分の値を求めることは殆ど不可能です。皆さんは、普段、定積分の値を求めるとき、まずどのような関数を求め、次に求めた関数に対してどんな操作をして定積分の値を求めますか。この順番で計算手順を書いてください。

■ 演習 11-1 について

(1) では第 8 回で学んだ逆関数の微分法を用います。$(\mathrm{Sin}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となることは使って構いません。与えられた関数 $f(x)$ は関数 $h(x) = \frac{x}{a}$ $(-a < x < a)$ と逆正弦関数 $\mathrm{Sin}^{-1}(y)$ $(-1 < y < 1)$ との合成関数になっているので、合成関数の微分法を用いて導関数を求めます。すると、$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a < x < a)$ がわかります。

(2) は (1) の結果と微積分学の基本定理を用いて示すことができます。(1) より、関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(-a < x < a)$ は関数 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a < x < a)$ の原始関数なので、

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}dt = \left[\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^x = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\underline{-\mathrm{Sin}^{-1}(0)}$$

となります。波線部分が（微分によって失われた）定数分のずれを与えています。今の場合、値が 0 なので結果としていりませんが、考察過程に欠かすことはできません。

■ 演習 11-2 について

(1) は、積和の公式を使って $\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$ を導いた人が多かったですが、その場合でも、どのように公式に当てはめたのかがわかるように解答する必要があります。積和の公式を暗記するよりは、加法公式 $\sin(3x \pm 2x) = \sin 3x \cos 2x \pm \cos 3x \sin 2x$ (複号同順) から導いた方が確実ではないかと思います。(2) は、$f(x)$ の第 1 項と第 2 項の定積分を独立に計算します。第 1 項は $4x\sqrt{x} = 4x^{\frac{3}{2}}$ と書き換えることにより原始関数 $\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}$ が見つかり、第 2 項は (1) の書き換えを用いて原始関数 $\frac{1}{2}(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x)$ が見つかります。これらを使うと、定積分の値 $\frac{8\pi^2}{45}\sqrt{\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{10}$ が求まります。

■ 次回予告

次回は有理関数の積分の計算法を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 12 回 (2026 年 6 月 25 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。