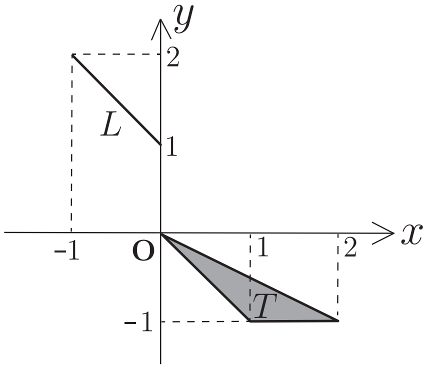
数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

12-1. 一次変換

$$F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y)=(3x+2y, 2x+3y)$$

により、右図で表される線分 L と三角形の周および内部 T とはそれぞれどのような図形に写されるか。その像を (x,y)-座標平面上に図示せよ。



12-2. $D=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x-3y\leq 1,\ 0\leq 2x+4y\leq 1\ \}$ とおく。

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をどのように定めると、一次変換

$$F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(u,v)=(au+bv,\ cu+dv) \qquad ((u,v)\in\mathbb{R}^2)$$

は、長方形領域 $R=[0,1]\times[0,1]$ を D に写すか？そのような行列 A を 1 つ与えよ。

(2) 重積分 $\displaystyle\int_D (3x+y)\,dxdy$ の値を求めよ。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.12]

2025 年 12 月 10 日発行

■ 第 11 回の学習内容チェックシートについて

- Q1 は図示された $\mathbb{R}^2$ における 3 つの部分集合 D_1, D_2, D_3 が有界か否か、閉集合か否か、有界閉集合か否かを判定する問題でした。有界閉集合というのは、読んで字の如しで、有界かつ閉集合であることを意味します。ということは、1 段目と 2 段目が両方○のときに限り 3 段目が○になるわけです。しかし、そうなっていないシートが多かったです。
- Q2 の表の 1 番目の解答には $f_0(x,y)$ や R_0 の説明がないもの、逆に、過剰に説明しているものがありました。関数 $f(x,y)$ は有界な集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で重積分可能という前提で、重積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の定義を述べる問題ですから、R を持ち出す必要はありません。
  $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f_0(x,y)$ を、D の外側では 0 と定めた、関数 $f(x,y)$ の拡張とするとき、$\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ は D を含むある長方形領域 R_0 上の重積分 $\displaystyle\int_{R_0} f_0(x,y)dxdy$ の値のことである、などと書くとよいでしょう。
  　同様に、表の 2 番目では D の特性関数 $\chi_D(x,y)$ の定義を書き添える必要があります。

■ 演習 11-1 について

(1) では $\displaystyle\int_1^4 \Big(\int_{2x+1}^{2x^2+x} \frac{x}{(y-x)^2}\,dy\Big)dx$ から書き出して、計算して終わりという答案が多かったです。授業や前回の通信で注意しているように、これは重積分を計算する際の重要なプロセスが不足しています。その問題で求められているものは何なのかを把握し、その問いに答える形で解答を締めくくるようにしてください。

(1) も (2) も与えられている D は縦線領域なので、[定理 11-4-1(1)] で与えられている公式を用いて、重積分の値を計算することができます。答えのみ記すと、(1) が $3-\log 5$, (2) が 2 となります。(2) では計算の途中で $e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$ という書き換えが必要になります。この部分で躓いてしまった人が一定数いました。

■ 演習 11-2 について

(1) は放物線と双曲線により囲まれた領域 D を図示する問題でした。答えのみやポイントが押さえられていない答案が多かったです。領域の図示においては、座標軸との交点、2 曲線の交点の座標を明示し、かつ、図中のどの部分が D なのかがわかるように指示や説明を加えなければなりません。さらに、境界を含むのか含まないのかについても言及する必要があります。

(2) は、D の面積を求める問題でした。単に積分の計算をしておしまいというものが数多くありましたが、D を縦線領域として表わしてから計算しましょう。この授業では面積を $\mu(D)$ で表わすことにしているので、最終的な答えとしては、「よって、D の面積は $\mu(D) = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} + 2\log(1+\sqrt{2})$ である。」と書くとよいでしょう。

■ 次回予告

今回は、一次変換という特殊な座標変換に関する重積分の変数変換公式を導きました。次回は、一般の座標変換について重積分の変数変換公式を導きます。特に、極座標変換の場合にその使い方を説明します。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 12 回 (2025 年 12 月 10 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。