

## 線形代数 1 演習問題

13-1. (一次独立性の階数を用いた判定)

行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 14 & 5 & 18 \end{pmatrix}$  について以下の問に答えよ。

(1)  $A$  の階数  $\text{rank } A$  を求めよ。

(2)  $A$  の列ベクトルの中で一次独立となるものの組を考えたとき、その組に含まれるベクトルの個数の最大値を求めよ。さらに、そのような組を 1 組与えよ。

13-2. (行列の階数と一次独立性)

次の 3 次列ベクトルの組は一次独立か、一次従属かを判定せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

これらのベクトルが一次従属であった場合には、 $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + u\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  を満たす同時には 0 でない実数  $s, t, u$  を 1 組見つけよ。

### ■ 第 12 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の 2 番目の問いに、「 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  が  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を必ず解に持つこと」と解答した人がいましたが、問われているのは自明な解自身のことですから、「連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  が常に持っている  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  という特別な解のこと」のように書いてください。
- Q2 の 6 番目の枠には (12-3d) を書き入れてください。“ $(t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R})$ ” がないシートが多数ありましたが、「但し書き」として書き添える必要があります。
- Q2 の第 4 項目における  $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$  は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とおくと  $x + 2y + 3z = 0$  と表わされます。さてどうするかですが、 $x, y, z$  のうちの 2 つの値を決めれば、残りも決まると考えます。例えば、 $y, z$  をそれぞれ実数  $s, t$  に決めたとします。すると、 $x$  が  $x = -2s - 3t$  のように決まります。こうして、実数解  $\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $s, t \in \mathbb{R}$ ) が求められます。

### ■ 演習 12-1 について

与えられた連立一次方程式の拡大係数行列に行基本変形を施して階段型にし、それを連立一次方程式に戻すと  $\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$  となります。これを後退代入で解きます。第 2 式の 2 つの変数のうち、ここでは  $z$  を決めることにし、 $z = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) とおきます。すると  $y$  が  $y = 2t - 4$  と決まります。これらを第 1 式に代入して  $x$  を求め、実数解  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) が得られます。2 つの波線部分は必要です。略すことはできません。

### ■ 演習 12-2 について

(1) は、 $A$  に ①  $\times (-2) +$  ②, ①  $\times (-1) +$  ③ を行なってから ②  $\times (-4) +$  ③ を行くと、階段行列  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  になるので、 $\text{rank } A = 2$  がわかります。

(2) まず、 $\text{rank } A = 2 < 4 = (A \text{ の列数})$  より、連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  は非自明な解を持ちます。 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解くことと  $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解くことは同値なので、 $\mathbf{x}$  を成分で表わして、

$$\begin{cases} x - y + 5z + 3w = 0 & \dots\dots\dots \text{①} \\ y - 2w = 0 & \dots\dots\dots \text{②} \end{cases}$$

を解けばよいことになります。②に注目し、 $w = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) と定めると  $y = 2t$  と決まり、①に代入して  $x + 5z = -t$  が得られます。さらに、 $z = s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) と定めると  $x = -5s - t$  に決まります。こうして、実数解

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

①                      ②

が求まります。問われているのは基本解ですから、下線の引かれた①, ②のベクトルを並べて“ ”で括ったものを答えとしなければなりません。

### ■ 次回予告

次回は、これまで学んできたことの応用として、固有値問題を取り上げます。

## 線形代数1・第13回(2024年7月4日)演習問題解答シート

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。