No.13 2025 年 12 月 22 日

線形代数 4 演習問題

13-1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ が定める $\mathbb{R}$-線形変換 T_A を考える。

(1) T_A の固有値とその重複度を求めよ。

(2) T_A の各固有値 α について、広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha)$ の次元と一組の基底を求めよ。

線形代数４通信 [No.13]

2025 年 12 月 22 日発行

■ 第 12 回学習内容チェックシートについて

- ◦ Q2(2) は、多項式 $f(x) = -2 + 3x - 4x^2$ に線形変換 T を代入して得られる線形変換 $f(T)$ により、各 $v \in V$ はどんな V の元に写されるのかを答える問題でした。定義より $f(T) = -2\mathrm{id}_V + 3T - 4T^2$ なので、この写像に v を入れて計算します。$T^2(v) = (T \circ T)(v) = T(T(v))$ に注意すると、$\big(f(T)\big)(v) = -2v + 3T(v) - 4T(T(v))$ となることがわかります。
- ◦ Q4(3) は、線形変換 T の固有多項式が $\Delta_T(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ により与えられているときに、(i) Cayley-Hamilton の定理から成り立つ T についての等式と、(ii) $d \neq 0$ のときの T^{-1} の T の多項式表示を書く問題でした。(i) については、定数項 d の部分に恒等写像 id_V を補うことを忘れているものがありました。(ii) についても同様のミスが沢山ありました。Cayley-Hamilton の定理から導かれる等式を変形すると $T \circ (-d^{-1}T^2 - d^{-1}bT - d^{-1}c\,\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$ となるため、$T^{-1} = -d^{-1}T^2 - d^{-1}bT - d^{-1}c\,\mathrm{id}_V$ がわかります。

■ 演習 12-1 について

(1) A の固有多項式は計算により (最初に、$|xE_3 - A|$ の第 1 行の -1 倍を第 2 行に加えてみましょう) $\Delta_A(x) = (x-4)(x+2)^2 = x^3 - 12x - 16$ となるので、Cayley-Hamilton の定理より $A^3 - 12A - 16E_3 = \mathrm{O}$ が成立します。これを利用して、A^3 は $A^3 = 12A + 16E_3 = \begin{pmatrix} -20 & 12 & 108 \\ -84 & 76 & 108 \\ -72 & 72 & -8 \end{pmatrix}$ のように求めることができます。

(2) $A^3 - 12A - 16E_3 = \mathrm{O}$ を変形すると $A(A^2 - 12E_3) = 16E_3$ が得られるので、A^{-1} は $A^{-1} = \dfrac{1}{16}(A^2 - 12E_3) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -9 \\ -17 & 15 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ のように求めることができます。

(3) $n \geq 0$ のとき、多項式 $f(x) = x^n$ に対して $f(A) = A^n$ となるので、A^n の固有値は、Frobenius の定理により、A の固有値を $f(x) = x^n$ に代入することで求められます。(1) の計算で $\Delta_A(x) = (x-4)(x+2)^2$ がわかっているので、A の固有値は $4, -2$ です。これより、A^n の固有値は $f(4) = 4^n,\ f(-2) = (-2)^n$ により与えられます。

次に、$n < 0$ のときの A^n の固有値を求めます。多項式 $g(x) = x^{-n}$ を考えると $g(A^{-1}) = A^n$ となるので、A^n の固有値は、Frobenius の定理により、A^{-1} の固有値を $g(x) = x^{-n}$ に代入することで求められます。ここで、A^{-1} の固有値は、A の固有値の逆数である (一般に、正則行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ について、$\alpha \in \mathbb{K}$ が $\mathbf{0}$ でないある $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ に関して $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ を満たすことと $A^{-1}\mathbf{x} = \alpha^{-1}\mathbf{x}$ を満たすことは同値なためです) ことから $4^{-1},\ (-2)^{-1}$ であることがわかり、$n < 0$ のとき A^n の固有値は $g(4^{-1}) = 4^n,\ g((-2)^{-1}) = (-2)^n$ により与えられることがわかります。

まとめると、n の正負に関わらず A^n の固有値は $4^n, (-2)^n$ となります。

(4) 多項式 $h(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ を考えると $h(A) = A^3 - 5A^2 - 2A + 24E_3$ となるので、その固有値は Frobenius の定理により $h(4), h(-2)$ により求めることができます。計算するといずれの値も 0 になることがわかるので、$A^3 - 5A^2 - 2A + 24E_3$ の固有値は 0 のみです。

■ 次回予告

次回は冪零変換の Jordan 標準形の定義とその求め方を学びます。

線形代数４・第 13 回 (2025 年 12 月 22 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。