

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎1）演習問題

13-1. (1) 定積分 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2}{(x^2+1)(3x^2+1)} dx$ を計算せよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{4x^3+5x}{2x^2+x+1} dx$ を計算せよ。

13-2. (1) 有理式

$$\frac{3x^3+2x+13}{(x-3)(x^2+1)^2}$$

を部分分数に展開せよ。

(2) 不定積分

$$\int \frac{3x^3+2x+13}{(x-3)(x^2+1)^2} dx$$

を求めよ。

※必要があれば、正の実数 c について、不定積分

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+c^2)^n} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が次の漸化式を満たすことを用いてよい。

$$I_n = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{x}{(2n-2)(x^2+c^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right\} \quad (n > 1),$$

$$I_1 = \frac{1}{c} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{c}\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

■ 第 12 回の学習内容チェックシートについて

- Q1(1) は概ねできていましたが、「積分区間の上端を変数に置き換えて得られる関数」とだけでは不明確なので、定義式 (12-1 a) を含めてください。
- Q2(2) は部分積分法を使って定積分を計算するための公式を書きます。公式には $F(x)$ が含まれますが、この記号は問題文にはないので、記号の説明を付け加える必要があります。
- Q3 の (1) と (2) は置換積分法の使い方に関する問題です。定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ を置換積分法で計算するには、まず、変数 x を別の変数、例えば t を用いて $x = \varphi(t)$ のように表わし、 x が α から β まで動くときの t の範囲を知る必要があります。その範囲は $\alpha = \varphi(a)$ となる $a \in J$ から $\beta = \varphi(b)$ となる $b \in J$ までです。その後、公式 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ を用いて、右辺の定積分を計算することになります。(2) の枠にはこの公式だけではなく「但し、 $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ 」のように、 a, b の説明を書き添えてください。

■ 演習 12-1 について

定積分の計算自体はとてもよくできていました。しかし、変数の置き換えをして、置換積分後の積分を計算して終了というものが多かったです。問題で与えられている積分と置換積分後の積分を等式で結ばないと、問われている積分を求めたことになりません。最終結論は「(問題で与えられた積分) =」という形で書くようにしてください。

(1) では、 $t = e^x$ または $t = e^x + 2$ とおいて、置換積分により計算します。その際、必要になるのは、① 積分区間の変更 (x が $\log 3$ から $\log 4$ まで動くときの t が動く範囲)、② $\frac{dt}{dx}$ の計算 (積分区間において 0 でないこと、それを t を用いて表わすこと) です。 $t = e^x$ とおいた場合、 x が $\log 3$ から $\log 4$ まで動くとき t は 3 から 4 まで動き、 $\frac{dt}{dx} = e^x = t > 0$ となるので、置換積分により定積分を計算して $\frac{1}{30}$ が求まります。

(2) では、置換積分と部分積分の両方を用います。まずは $t = \sqrt{x}$ または $t = \sqrt{x} + 1$ とおいて置換積分しましょう。 $t = \sqrt{x}$ とおいた場合は $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}$ となり、与えられた不定積分は $\int \log(t+1) \cdot 2t dt$ に等しくなります。 $2t = (t^2)'$ とみて、この不定積分を部分積分法により計算して $(t^2 - 1) \log(t+1) - \frac{1}{2}t^2 + t + C$ (C は積分定数) が得られます。これを x に戻して、与えられた不定積分は $(x-1) \log(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} + C$ (C は積分定数) であることがわかります。不定積分において“+C”は必要です。また、 C が積分定数であることも明記してください。

■ 演習 12-2 について

よくできていました。(1) の漸化式は部分積分法を用いて導きます。(1) の漸化式から得られる $I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{5}{16} I_0$ と、定積分の計算による $I_0 = \frac{\pi}{2}$ を合わせて、 $I_6 = \frac{5}{32} \pi$ が求まります。

■ 次回予告

次回は、半開閉区間や無限区間などの区間上での積分を考えます。このようなタイプの積分は広義積分と呼ばれます。広義積分の形で与えられる重要な数や関数が数多く存在します。

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎1)・第13回(2026年7月2日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。