数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎2) 演習問題

13-1. 次の重積分の値を求めよ。

(1) $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ y \leq \sqrt{3}x,\ y \geq -\sqrt{3}x\ \}$ のとき、$\displaystyle\int_D 5xy^2\,dxdy$.

(2) $D = \left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ -x \leq y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\ \right\}$ のとき、$\displaystyle\int_D \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) dxdy$.

13-2. (x, y)-座標平面において、4つの放物線

$$y = x^2, \qquad y = \frac{1}{4}x^2, \qquad x = y^2, \qquad x = \frac{1}{4}x^2$$

により囲まれる面積確定有界閉集合を D とする：

$$D = \left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq x^2,\ \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq y^2\ \right\}.$$

(1) 各 $(x, y) \in D$ に対して、$uy = x^2,\ vx = y^2$ を満たす u, v ($1 \leq u, v \leq 4$) が存在する。x, y を u, v で表わせ。

(2) $E = [1, 4] \times [1, 4]$ とおくと、(1) により、E から D への変数変換 F が定まる。この変数変換を利用して、重積分

$$\int_D xy\,dxdy$$

を計算せよ。

グレーの部分を訂正しました (12月17日20時30分)。訂正前の値で計算しても不利にならないように、配慮します。

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎２)通信 [No.13]

2025 年 12 月 17 日発行

■ 演習 12-1 について

線分 L と T は次のように集合で表わすことができます：

$$L=\{(1-t)(0,1)+t(-1,2)\,|\,0\le t\le 1\},\quad T=\{s(2,-1)+t(1,-1)\,|\,s,t\ge 0,\ s+t\le 1\}.$$

よって，一次変換の線形性により、L,T の F による像は次で与えられることがわかります：

$$F(L)=\{(1-t)(2,3)+t(1,4)\,|\,0\le t\le 1\},\ F(T)=\{s(4,1)+t(1,-1)\,|\,s,t\ge 0,\ s+t\le 1\}.$$

これより、$F(L)$ は $(2,3)=F(0,1),\ (1,4)=F(-1,2)$ を端点とする線分、$F(T)$ は $(0,0)=F(0,0),\ (4,1)=F(2,-1),\ (1,-1)=F(1,-1)$ を頂点とする三角形の周および内部になっていることがわかります。これを (x,y)-座標平面上に図示すればよいわけです。

■ 演習 12-2 について

(1) で問われている行列 A は、$u=x-3y,\ v=2x+4y$ とおいて x,y について解くと、その解における u,v の係数を並べると得られます。先の連立一次方程式は、行列とベクトルの積により $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ のように表わされるので、この両辺に左から $\begin{pmatrix}1&-3\\2&4\end{pmatrix}$ の逆行列を掛けることより x,y が求まり、A はその逆行列により与えられます。逆行列の公式より、$A=\dfrac{1}{1\cdot 4-(-3)\cdot 2}\begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{10}&\frac{3}{10}\\-\frac{2}{10}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$ とわかります。(2) は公式に当てはめて計算するだけであり、答えは $\frac{1}{10}$ になります。$|\det A|$ 倍することを忘れがちなので、注意してください。

■ 第 12 回の学習内容チェックシート Q2 について

$D=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ |\ 0\le px+qy\le 1,\ 0\le rx+sy\le 1\ \}$ によって与えられる平行四辺形 D 上での連続関数 $f(x,y)$ の重積分の計算方法を答える問題でした。

最初の設問は長方形領域 $R=[0,1]\times[0,1]$ の像が D に一致するような一次変換 F を求めるには？というものでした。「$u=px+qy,\ v=rx+sy$ とおき、これを x,y について解く」と答えたシートが多かったです。x,y について解いたあと、どうすれば $F(R)=D$ を満たす一次変換 F が求められるかまで書いてください。連立一次方程式 $u=px+qy,\ v=rx+sy$ を解いた結果、$x=au+bv,\ y=cu+dv\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ となったとするとき、一次変換 F を $F(u,v)=(au+bv,cu+dv)\ ((u,v)\in\mathbb{R}^2)$ により定めればよい、と書くとよいでしょう。a,b,c,d は、2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ の逆行列 X^{-1} を求めれば具体的に計算できますが、解答には p,q,r,s を使って得られる式まで書く必要はありません。

2 番目の設問は D 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ の重積分の $\int_D f(x,y)dxdy$ を計算するには？というものでした。その値は、(上のようにして求めた一次変換 F を用いて、) 公式

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_R f(au+bv,cu+dv)|ad-bc|\,dudv$$

により求めることができます。このことを書いてください。

■ 次回予告

次回は積分領域が有界閉集合でない場合や、関数が有界でない場合についての重積分、すなわち、広義重積分の定義と計算方法を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 13 回 (2025 年 12 月 17 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。