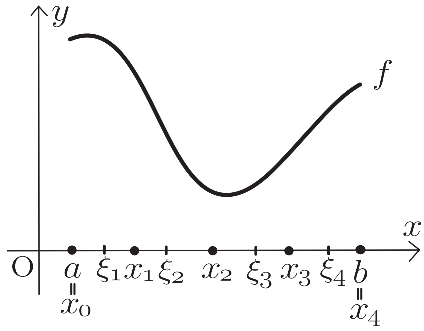
2024 年 7 月 11 日

基礎数学演義 1 第 14 回・問題解答&要約シート (1)

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

Q14-1. (1) 関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ のグラフが下の曲線で与えられ、$[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ とそれにフィットする有限数列 $\xi =$ “$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$” を下の図のようにとる。このとき、リーマン和 $S(f;\Delta,\xi)$ は何を表わすか。下図を用いて説明せよ。



(2) $t > 0$ とする。閉区間 $[0,t]$ を n 等分して分割 $\Delta : 0 < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \cdots < \frac{(n-1)t}{n} < t$ を作り、各小閉区間 $\left[\frac{(i-1)t}{n},\ \frac{it}{n}\right]$ $(i = 1, \cdots, n)$ から 1 点 $\frac{it}{n}$ を選んで、Δ にフィットする有限数列 $\xi =$ “$\frac{t}{n},\ \frac{2t}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)t}{n},\ t$” を作る。関数 $f(x) = x$ $(x \in [0,t])$ のリーマン和 $S(f;\Delta,\xi)$ を求めよ。

Q14-2. (1) 自然数 n に対して、$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 3}$ とおく。R_n は、閉区間 $[0,1]$ の分割 $\Delta : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ とそれにフィットする有限数列 $\xi = \left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=1}^{n}$ をとると、ある連続関数 $f(x)$ $(x \in [0,1])$ のリーマン和 $S(f;\Delta,\xi)$ に一致する。そのような連続関数 $f(x)$ を 1 つ見出し、$\lim_{n\to\infty} R_n$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、$R_n = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{4i\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{3i\pi}{n}\right)$ とおく。R_n は、閉区間 $[0,\pi]$ の分割 $\Delta : 0 < \frac{\pi}{n} < \frac{2\pi}{n} < \cdots < \frac{(n-1)\pi}{n} < \pi$ とそれにフィットする有限数列 $\xi = \left\{\frac{i\pi}{n}\right\}_{i=1}^{n}$ をとると、ある連続関数 $f(x)$ $(x \in [0,\pi])$ のリーマン和 $S(f;\Delta,\xi)$ に一致する。そのような連続関数 $f(x)$ を 1 つ見出し、$\lim_{n\to\infty} R_n$ を求めよ。

2024 年 7 月 11 日

基礎数学演義 1　第 14 回・問題解答&要約シート (2)

学 籍 番 号 ________________　氏 名 __________________________

Q14-3. 次の各定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x\sqrt{x} + \sin 4x \cos 3x)dx$

(2) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 4} \frac{2}{e^x + 2}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

Q14-4. n を 0 以上の整数として、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく。

(1) 部分積分法により、漸化式 $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$ $(n \geq 1)$ を導け。

(2) I_6 を求めよ。

(3) I_7 を求めよ。