

2025 年 12 月 25 日

フレッシュマンゼミナール 第 14 回・問題解答&要約シート (1)

氏 名 _____

Q14-1. 可算集合の定義を書きなさい。

Q14-2. (1) \mathbb{Z} は可算集合であることを示しなさい。

(2) 偶数の全体 $2\mathbb{Z}$ は可算集合であることを示しなさい。

Q14-3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であることを示しなさい。

フレッシュマンゼミナール 第 14 回・問題解答&要約シート (2)

氏 名 _____

Q14-4. \mathbb{Q}_+ を正の有理数の全体からなる集合とすると、 \mathbb{Q}_+ は可算集合となることを示しなさい。

Q14-5. \mathbb{Q} は、 \mathbb{Q}_- を負の有理数の全体からなる集合とすると、 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$ と表わされることに注目し、 \mathbb{Q} は可算集合となることを示しなさい。

Q14-6. 対角線論法により、开区間 $(0, 1)$ と \mathbb{N} の間に全単射は存在しないことを示しなさい。

2025 年 12 月 25 日

フレッシュマンゼミナール 第 14 回・問題解答&要約シート (3)

氏 名 _____

Q14-7. カントール-シュレーダー-ベルンシュタインの定理とは何ですか。定理の主張を書きなさい。

Q14-8. カントール-シュレーダー-ベルンシュタインの定理を用いて、 \mathbb{R} と \mathbb{C} の濃度は等しいことを示しなさい。

フレッシュマンゼミナール 第 14 回・問題解答&要約シート (4)

氏 名 _____

Q14-9. 2 つの集合 A, B について、 B の濃度が A の濃度よりも大きいとはどのようなときをいいますか。

Q14-10. (1) 任意の有限集合 A に対して、冪集合 $\mathcal{P}(A)$ の濃度は A の濃度よりも大きいことを示しなさい。

(2) 任意の集合 A に対して、単射 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ が存在することを示しなさい。

(3) 集合 A に対して、全単射 $g: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ が存在すると仮定すると、 A の部分集合

$$T = \{ a \in A \mid a \notin g(a) \}$$

に対して、 $g(t) = T$ を満たす $t \in A$ が存在することになります。 $t \in T$ と仮定しても $t \notin T$ と仮定しても矛盾が生じることを示しなさい。