

線形代数 1 演習問題

14-1. (固有値・固有ベクトル)

行列 $A = \begin{pmatrix} 24 & 20 & 24 \\ -40 & -36 & -48 \\ 20 & 20 & 28 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対して $A\mathbf{p}$ を計算し、 \mathbf{p} が A の固有ベクトルか否かを調べよ。

14-2. (固有値・固有ベクトル)

行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

■ 第13回学習内容チェックシートについて

- Q2 は一次独立な状況と一次従属な状況を図示する問題でした。 \mathbb{R}^2 については正しいのに、 \mathbb{R}^3 では一次独立と一次従属の図が逆になっているものがありました。また、 \mathbb{R}^3 における図示では、一次独立と一次従属の違いが分らない描き方をしているシートが多かったです。
- Q3 では、階段行列 B において、段が降りるところに注目し、 B の列ベクトルの中から rank A 個分の一次独立なベクトルを抜き出します。問題の行列の場合には、rank $A = 3$ であり、 B から第 1, 2, 4 列を抜き出します。そして、その選んだ列番号と同じ番号の列ベクトルを A から抜き出すと、「行基本変形のもとでは一次独立となる列番号の組み合わせは変わらない」という事実により、その組は一次独立になっていることがわかります。

最後の枠の中に「列ベクトルの最大個数」と書き入れた人がいました。確かに、列ベクトルの最大個数は変化しませんが、個数だけに注目してしまうと、どの列ベクトルの組み合わせが一次独立になるのかはわからないので、最後の枠に入れる言葉としては不適切です。

■ 演習問題 13-1 について

- (1) A に、ガウスの消去法の前進部分に相当する行基本変形を施していくことにより、階段行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られるので、rank $A = 3$ とわかります。

(2) A の列ベクトルのうち一次独立となる組で、その組に含まれている個数の最大値は rank A で与えられるため、求める最大個数は 3 になります。 A の列ベクトルから条件に合う 3 個を選ぶためには、行基本変形を施して得られた階段行列 B を見ます。段が下がる列に注目して、 B において一次独立となる列ベクトルの組として、第 1, 2, 5 列ベクトルが見つかります。すると、行基本変形の下で列ベクトルの一次独立性は保存されるので、 A においても第 1, 2, 5 列からなるベクトルの組が一次独立になっていることがわかります。その理由（波線部分）が書かれていない答案が多数ありましたが、必要です。

■ 演習問題 13-2 について

$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ において行基本変形を行うことにより、rank $A = 2$ がわかります。rank $A = 2 < 3$ なので、組 “ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ” は一次従属です。ということは、 $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + u\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす、同時には 0 でない実数 s, t, u が存在することになります。このような s, t, u を 1 組見つけるには、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けばよく、この方程式を解くことは、rank A を求める際に得られた階段行列より、連立一次方程式
$$\begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$
 を解くことに同値となること

わかります。この連立一次方程式を後退代入で解いて、実数解 $\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($k \in \mathbb{R}$) が求められるので、特に $k = 1$ のときを考えて、関係式 $7\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ が見つかります。

■ 次回予告

次回も引き続き、固有値問題を扱います。「正方行列はいつ対角化できるか?」という問題を考察します。

線形代数1・第14回(2024年7月11日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。