線形代数1演習問題

14-1. (固有値の重複度と対角化可能性)

3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 71 & -60 & 12 \\ 75 & -64 & 15 \\ 90 & -90 & 29 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) A の固有値と各固有値の重複度を求めよ。

(2) A の重複度 2 の固有値に対して、その固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

(3) (i) A は対角化可能か否かを簡単な理由をつけて答えよ。

(ii) さらに、A が対角化可能なときには、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P の作り方を述べ、

(iii) そのとき $P^{-1}AP$ がどのような対角行列になるのかを答えよ。

線形代数１通信 [No.14]

2026 年 7 月 9 日発行

■ 第 13 回学習内容チェックシートについて

Q1 の固有ベクトルの定義を記述する欄に、「$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}$ が存在するときの $\mathbf{p}$ を.......」という解答がありました。固有ベクトルの定義においては、それが「存在する・存在しない」ということは問わないので、$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}$ のこと、のように書いてください。

■ 演習 13-1 について

(1) 行列式の計算は、いつも言っているように、工夫して計算しましょう。「足し上げ」が有効な場合もありますが、今回は足し上げても くくり出せる因子はないので、0 を作る方針をとります。例えば、第 2 列の 1 倍を第 3 列に加えてみましょう。すると、第 3 列に $x-7$ が揃うのでそれをくくり出すことができます。次に、③ $\times(-1)+$ ② を行い、0 を増やしてから第 3 行に関して余因子展開します。このようにして計算することで、$\mathit{\Delta}_A(x) = (x-7)^2(x-8)$ のように因数分解されることがわかり、A の固有値は $7, 8$ であることがわかります。

(2) とても出来が悪かったです。$A\mathbf{p}$ を計算すると、$7\mathbf{p}$ になることが確かめられます。よって、$\mathbf{p}$ が A の固有ベクトルになるのは $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ のときであり、そのときに限ります。$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ が零ベクトルにならないのは、$2a-2b,\ a,\ b$ のいずれかが 0 でないときであり、それは、a, b が同時に 0 でないとき、すなわち、$a \neq 0$ または $b \neq 0$ であるときと言い換えることができます。$a \neq 0,\ b \neq 0$ とは違うことに注意してください。

■ 演習 13-2 について

まず、A の固有値を求めるために、$\mathit{\Delta}_A(x) = \begin{vmatrix} x-7 & 6 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}$ を計算します。
$\mathit{\Delta}_A(x) = (x-1)(x-4)$ のように因数分解されるため、A の固有値は $1, 4$ です。

次に、固有ベクトルを求めます。まず、1 に属する固有ベクトルを求めましょう。$1 \cdot E_2 - A$ は、行基本変形により

$$1 \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} 1-7 & 6 \\ -3 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のようになるため、方程式 $-x+y=0$ を解きます。この方程式の実数解は $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ ですが、零ベクトルは固有ベクトルとは呼ばないため、この実数解から零ベクトルを除いて、固有値 1 に属する A の固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ により与えられることがわかります。同様にして、固有値 4 に属する A の固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ により与えられることがわかります。

ほとんどの人は行列 (　) と行列式 |　| の使い分けができていますが、10 名弱の人が混同した解答を書いていました。再度注意しておきますが、**行列と行列式は別物 (計算ルールも考え方も違う)** ので、**両者を適切に使い分け**て読み書きしなければなりません！固有多項式 $\mathit{\Delta}_A(x)$ は行列式なので、計算では |　| を使って等号 = で結んでいきますが、固有値 λ に属する固有ベクトルの計算では、係数行列 $\lambda E_2 - A$ の行基本変形を行うので、(　) を使って矢印 → で結んでいきます。

■ 線形代数１の試験について

- 実施日時：2026 年 7 月 22 日（水）第 2 時限（11 時 30 分〜12 時 50 分、80 分）
- 実施教室：2104
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください (学生証を忘れると、受験することができません！)。
- 黒のボールペンまたは黒のインキ（容易に消すことができないもの）と鉛筆またはシャープペン（色は黒）を用意してください。
  学籍番号、氏名欄には黒のボールペンまたは黒のインキを使用して書きます。
  解答欄には鉛筆またはシャープペン（色は黒に限る）を使用して書きます。
- 試験中のスマートフォン、携帯電話、ipod、ウェアラブル端末などの電子機器の使用は認められていません (時計代わりの使用も不可)。試験開始前に音や振動が出ないように設定して、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 机の両端に離れて着席してください。
- 試験範囲：§1 から §14 まで。
  行列式の計算、行列の階数の計算、逆行列の計算、行列の正則性の判定やベクトルの一次独立性の判定、行列式の性質、行列の固有値の問題を中心に出題。
  充分に問題練習と（線形代数１通信のコメント、学習内容チェックシート、オンデマンド配信授業も含めて）復習をして、試験に臨みましょう。
- 試験答案において、記号の使い方には気をつけてください。特に、行列 (　) で書くべきところを行列式 |　| で書いている、あるいは、その逆になっている場合には、たとえ計算ができていても、その小問の得点は 0 点になります。“$\times -2$” などの記号の不適切な使い方もまた 0 点になります。
  ベクトルを太字で表していない、行列の基本変形で $=$ を使う、行列式の計算で $\to$ を使う、などの記号の不適切な使い方は減点の対象になり得ます。
- 今日の提出物は 7 月 13 日 (月) の 12 時〜14 時 30 分の間に和久井の研究室まで取りに来てください。第 13 回以降の学習内容チェックシートで「要再提出」の印が押されているものについては、7 月 21 日 (火)18 時までに提出すれば受け付けて、正しく修正されていれば加点します。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、平常点 ((演習点) + (チェックシート点) − (注意・不正点) + (一年次生に限り TOEIC-IP テスト受験・不受験点)) を加算した数値を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます (0.5 $\to$ 1)。その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合には不合格になります。
  ※チェックシートによる得点とは、提出したチェックシート用紙に「確認」印が印されたものを 1 点と数えたときの合計のことで、7 月 21 日 18 時までに提出された分が対象です。
  不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。

線形代数１・第 14 回 (2026 年 7 月 9 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。