線形代数 2 演習問題

14-1(線形変換の対角化とその応用).

　漸化式

$$a_{n+3} + 4a_{n+2} - 9a_{n+1} - 36a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体からなるベクトル空間を V とし、$T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \{a_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$$

によって定義される線形変換とする。

(1) V の基底 $\mathscr{B}$ を一組与えよ。さらに、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ をその基底の一次結合で表わせ。

(2) (1) で与えた基底 $\mathscr{B}$ に関する T の行列表示 A を求めよ。

(3) (2) で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(4) T の行列表示が対角行列となるような V の基底 $\mathscr{B}'$ を一組与えて、そのときの T の行列表示を記せ。但し、$\mathscr{B}'$ は、それを構成する各数列を (1) で与えた基底 $\mathscr{B}$ の一次結合で表わすことにより与えよ。

線形代数２通信　[No.14]　2025 年 1 月 9 日発行

■ 第 13 回学習内容チェックシートについて

- Q2 の第 2 項目は、$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 “$x^2, x, 1$” の下での $\mathbb{R}[x]_2$ と $\mathbb{R}^3$ との間の対応を問う問題です。2 番目の枠には、$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対応する $\mathbb{R}[x]_2$ のベクトル $ax^2 + bx + c$ が入ります。3 番目の枠には、$\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間 $\{\, a + 2ax + 3ax^2 \mid a \in \mathbb{R} \,\}$ に対応する $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\left\{ \begin{pmatrix} 3a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$ が入ります。4 番目の枠には、$\mathbb{R}^3$ の部分空間 W' に対応する $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間 W の基底を一組書き入れます。W' は “$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$” を基底に持つので、$W$ は “$x^2 + 2x,\ x + 1$” を基底に持つことがわかります。
- Q3 の書き直しを要する人は、以下の説明をよく読み、整理した解答を書いてください。V に一組の基底 $\mathscr{B} =$ “$v_1, \cdots, v_n$” が与えられると、V のベクトル $v = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$ に数ベクトル $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を対応させる線形同型写像 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が定まります。Φ を基底 $\mathscr{B}$ が定める V の座標系と呼ぶのでした。座標系 Φ の下で、V の部分空間 W には $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W' = \Phi(W)$ が対応します。W' に対しては、連立一次方程式を解いたり、行列に行基本変形をなどを行って、基底を一組求めることができます。このようにして求められた W' の基底を、Φ^{-1} でもとのベクトル空間に戻せば、W の基底が得られます。

■ 演習 13-1 について

基底に並んでいるベクトルの順番に気をつけてください。(1) の答えは、$f(x) = 1 \cdot (x-3)^3 + 2 \cdot (x-3)^2 + 3 \cdot (x-3) + 4 \cdot 1$ を計算して、$x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ になります。(2) の答えは、$1 - 6x^2 + 2x^3 = 2(x-3)^3 + 12(x-3)^2 + 18(x-3) + 1$ と書き換えられることから、$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

この問題は微積分で学んだ Taylor 展開と関係があります。3 次多項式 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とみなして $x = 3$ の周りで Taylor 展開を行うと、$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3$ のように表わされます。その係数 $\frac{f'''(3)}{3!}, \frac{f''(3)}{2}, f'(3), f(3)$ を縦に並べたものが、与えられた基底 $\mathscr{B}$ に関する座標ベクトルになっています。

■ 演習 13-2 について

$f_1, \cdots, f_5 \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ より、W は $V := \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ の部分空間とみなせます。“v_1, v_2, v_3” は V の基底をなすので、この基底に関する座標系 Φ で W を写して、一旦、$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\Phi(W)$ の次元と一組の基底を求めます。$W = \mathrm{Span}\{f_1, \cdots, f_5\}$ より $\Phi(W) = \mathrm{Span}\{\Phi(f_1), \cdots, \Phi(f_5)\}$ となるため、行列 $A := (\Phi(f_1) \ \cdots \ \Phi(f_5))$ に行基本変形を施して階段型にします。すると、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られます。これより、$\dim \Phi(W) = \mathrm{rank}\, A = 2$ であり、A の 2 個の列ベクトルの一次独立な組は $\Phi(W)$ の基底になることがわかります。A から取り出す 2 個の列ベクトルは、「行基本変形の下で、一次独立となる列番号の組み合わせは変わらない」という結果により、得られた階段行列において「段が下がる」ところと同じ列番号のものでよく、今の場合には “$\Phi(f_1), \Phi(f_2)$” を選ぶことができます。こうして得られた $\Phi(W)$ の情報を Φ^{-1} で W に戻すことで、$\dim W = 2$ と W が “f_1, f_2” を基底に持つことがわかります。

線形代数２・第 14 回 (2025 年 1 月 9 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。