# 線形代数 4 演習問題

**14-1**. 行列 $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ について以下の問いに答えよ。

(1) $N$ は冪零行列であることを示せ。

(2) $N$ の Jordan 標準形を求めよ。

(3) $P^{-1}NP$ が Jordan 標準形となるような正則行列 $P \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ を 1 つ求めよ。

# 線形代数 4 通信 [No.14] 2025 年 12 月 25 日発行

## ■ 第 13 回学習内容チェックシートについて

不正解が多かった Q4(2) を説明します。まず、$\Delta_A(x) = (x+2)(x-4)^3$ であることから、$\dim \tilde{W}(4, T_A) = 3$ がわかります。問題はこの後です。各 $k \in \mathbb{N}$ に対して線形写像 $T_{(A-4E_4)^k} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ に次元公式を適用して、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) = 4 - \mathrm{rank}\,(A-4E_4)^k$ が得られます。$\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k} \subset \tilde{W}(4, T_A)$ より $\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) \leq \dim \tilde{W}(4, T_A) = 3$ が常に成り立ち、$k$ を十分に大きくとると (13-1b) により $\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) = 3$ となります。このような $k$ について $\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k} = \tilde{W}(4, T_A)$ となるので、$\tilde{W}(4, T_A)$ を求めるには、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A-4E_4)^k}) = 3$ を満たす $k$ を見つけて、連立一次方程式 $(A-4E_4)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$ を実数の範囲で解けばよいことになります。$(A-4E_4)^k$ とすべきところを $A^k$ とした解答がいくつもありました。同様の間違いは演習 13-1 の答案にもありました。

## ■ 演習 13-1 について

$A$ は上三角行列なので、その固有多項式は $xE_4 - A$ の対角成分の積、つまり、$\Delta_A(x) = (x+2)^3(x-2)$ となります。したがって、$A$ の固有値は $-2, 2$ であり、重複度は順に $3, 1$ です。さらに、固有値 $\alpha$ に属する広義固有空間 $\tilde{W}(\alpha)$ の次元は $\alpha$ の重複度に一致するので、$\dim \tilde{W}(-2) = 3,\ \dim \tilde{W}(2) = 1$ が直ちに従います。

$\tilde{W}(-2)$ の一組の基底は [例 13-5-2] と同様に求められます。まず、$k = 1, 2, \cdots$ と順番に $\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A+2E_4)^k})$ を計算し、初めて $\dim \tilde{W}(-2) = 3$ に一致するときの $k$ を求めます。$A+2E_4$ に行基本変形を施し、階段型にすることにより $\mathrm{rank}\,(A+2E_4) = 3$ がわかります。したがって、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{A+2E_4}) = 4 - \mathrm{rank}\,(A+2E_4) = 4-3 = 1$ です。3 に達しないので、$(A+2E_4)^2$ を計算します。行基本変形を行い階段型にして $\mathrm{rank}\,(A+2E_4)^2 = 2$ がわかるので、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A+2E_4)^2}) = 4-2 = 2$ です。まだ 3 に達しないので、$(A+2E_4)^3$ を計算します。今度は $\mathrm{rank}\,(A+2E_4)^3 = 1$ になり、$\dim(\mathrm{Ker}\, T_{(A+2E_4)^3})$ は 3 に達するため $\tilde{W}(-2) = \mathrm{Ker}\, T_{(A+2E_4)^3}$ とわかります。$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおき、連立一次方程式 $(A+2E_4)^3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて $x = s,\ y = t,\ z = u,\ w = -4u\ (s, t, u \in \mathbb{R})$ が得られ、$\tilde{W}(-2)$ の一組の基底として "$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$" が見つかります。

$\tilde{W}(2)$ の方は、次元が 1 であるため $\tilde{W}(2) = W(2)$ となり、したがって、連立一次方程式 $(A-2E_4)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解として $\tilde{W}(2)$ が求まります。先程のように $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ を成分で表わして計算することにより、$\tilde{W}(2)$ の一組の基底として "$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$" を見つけることができます。

## ■ 訂正

No.13 の事前練習用演習問題のヒントと略解に誤りがありました。$p_2(A)$ が正しくなく、以降の計算も間違っていました。修正版に差し替えましたので、HP で確認してください。

## ■ 次回予告

次回は Jordan 標準形の求め方とその微分方程式への応用を学びます。

**線形代数４・第 14 回 (2025 年 12 月 25 日) 演習問題解答シート**

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

---

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。