No.14 2026 年 7 月 9 日

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）演習問題

14-1. 次の各広義積分について、それが存在するのであればその値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

14-2. p, q を $0 < p < 1,\ q > 1$ であるような実数とし、広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

について考える。

(1) 実数 x が $0 < x \leq 1$ の範囲を動くとき、x^{p-1} と $(1-x)^{q-1}$ の取り得る値の範囲をそれぞれ求めよ。

(2) 条件「すべての $x \in (0,1]$ に対して $x^{\alpha+p-1}(1-x)^{q-1} \leq M$」を満たすような実数 $\alpha < 1$ と $M > 0$ を一組見つけることにより、広義積分 $B(p,q)$ が収束することを示せ。

注意：上の問いでは $0 < p < 1,\ q > 1$ の場合のみ考えたが、任意の実数 $p, q > 0$ に対して広義積分 $B(p,q)$ が収束することを証明することができる (詳しくは教科書 p.44–45 参照)。2 変数関数 $B(p,q)$ $(p, q > 0)$ を**ベータ関数**という。

$$x^p(1-x)^{q-1} = (1-x)^{p+q-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p$$

と書いて、部分積分法を適用すると、漸化式

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$$

を導くことができる。これより、p, q が自然数のとき、

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

であることがわかる。実は、任意の実数 $p, q > 0$ に対して、

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成り立つ (証明は、例えば、杉浦光夫・著『解析演習』(基礎数学 7) 東京大学出版会 p.207 を参照)。

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１）通信 [No.14]

2026 年 7 月 9 日発行

■ 第 13 回の学習内容チェックシートについて

- ◦ Q2 の第 1 項目では、余りを「定数」や 2 と答えたシートが多かったです。$P(x)$ から $Q(x)$ に x^k の適当な定数倍を掛けたものを引いていき、これ以上引けない状況になったら商と余りが確定します。7 次式から引くことができるのは、最大でも 7 次式ですから、$Q(x)$ が 3 次式であることから $k \leq 4$ でなければならず、したがって、商の次数は 4 以下になります。その商を $L(x)$ とおくと、$P(x) - L(x)Q(x)$ からこれ以上 $Q(x)$ に x^k の適当な定数倍を掛けたものは引けないので、余りは 0 かまたは 2 次以下の多項式になります。
- ◦ Q2 の第 2 項目の (A), (B) には、それぞれ有理式 $\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{Bx+C}{((x+b)^2+c^2)^n}$ を書き入れればよいのですが、それだけでなく、A, B, C, a, b, c が実数であることや、$c \neq 0$ であり、m, n は自然数であることなどを付記してください。
- ◦ Q3 については、与えられている有理式の分母の因数分解の形から、

$$\frac{dx+k}{(x-a)((x-b)^2+c^2)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+D}{(x-b)^2+c^2} + \frac{Dx+E}{((x-b)^2+c^2)^2} \qquad (A, B, C, D, E \in \mathbb{R})$$

のように展開できることがわかります。右辺の第 2 項と第 3 項の分子を定数にしていたシートが少なくありませんでした。それらの分母は (1 次式に分解できない) 2 次式の冪乗であるため、除法の定理を使って分子の次数を減らすことができても、1 次式までです。定数 A, B, C, D, E を求めるには、両辺に $(x-a)((x-b)^2+c^2)^2$ を掛けて分母を払って得られる多項式の係数比較をすることで連立一次方程式を立てて、それを解きます。

■ 演習 13-1 について

(1) $\dfrac{2x^2}{(x^2+1)(3x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{3x^2+1}$ のように部分分数展開し、$[-1, 1]$ 上での右辺の定積分を計算します。今年度も $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+b^2}\,dx$ の形の不定積分を $\frac{1}{2ax}\log(ax^2+b^2)+C$ (C は積分定数) と勘違いしている人が大勢いました。この不定積分は、$t = \sqrt{a}x$ とおいて置換積分し、演習問題の I_1 の式を使って計算することができます。$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \mathrm{Tan}^{-1}(x) + C$, $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{3}x) + C$ より、与えられた定積分の値は $\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\pi$ になることがわかります。

(2) 分子の次数が分母の次数よりも大きいので、まず、(分子)÷(分母) を実行します。すると、$\dfrac{4x^3+5x}{2x^2+x+1} = 2x - 1 + \dfrac{4x+1}{2x^2+x+1}$ となり、この右辺を積分することで $x^2 - x + \log(2x^2+x+1) + C$ (C は積分定数) が得られます。

■ 演習 13-2 について

まず、分母の因数分解の形から $\dfrac{3x^3+2x+13}{(x-3)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ $(A, B, C, D, E \in \mathbb{R})$ のように部分分数に展開されることがわかります。分母を払うと

$$3x^3+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-3)(x^2+1) + (Dx+E)(x-3) \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

となり、$x = 3$ を代入して $A = 1$ が求まります。$(*)$ に $A = 1$ を代入したのち、係数比較により連立一次方程式を立てて B, C, D, E を求めると、$B = -1,\ C = 0,\ D = -1,\ E = -4$ が得られます。あとは、公式を用いて計算して、次を得ることができます：

$$\int \frac{3x^3+2x+13}{(x-3)(x^2+1)^2}\,dx = \log\frac{|x-3|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1-4x}{2(x^2+1)} - 2\mathrm{Tan}^{-1}(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１), (和久井・担当）の試験について 2026 年 7 月 9 日

- 実施日時：2026 年 7 月 23 日（木）第 5 時限（16 時 30 分から 17 時 50 分まで）
- 実施教室：2102
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください (学生証を忘れると、受験することができません！)。
- 試験中の携帯電話・スマートフォン・ウェアラブル端末の使用は認められません (時計代わりの使用も不可)。試験開始前に音や振動が出ないように設定して、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 机の両端に離れて着席してください。また、空席ができないように前に詰めて座ってください。
- 試験範囲：§1 から §14 まで（演習問題で言えば、No.1 から No.14 まで)。
  数列と関数の極限の計算 (ロピタルの定理を使う問題)、微分の計算 (合成関数の微分法、逆関数の微分法、Maclaurin 展開)、積分の計算 (部分積分、置換積分、有理関数の積分、広義積分)、リーマン和と定積分に関する問題を中心に出題。
  充分に問題練習と（数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎１) 通信のコメント、学習内容チェックシート、オンデマンド配信授業も含めて）復習をして、試験に臨みましょう。
- 今日の提出物を 7 月 13 日 (月) の 12 時 15 分～14 時 30 分の間の間に返却しますので、和久井の研究室 (第 4 学舎 1 号館教授棟 2 階) まで取りに来てください。平常点を知りたい人、確認したい人には教えます。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、平常点（学習内容チェックシート点 + 演習点 − 携帯点）を加算した数値を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます (0.5 $\rightarrow$ 1)。その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合は不合格です。
  ※学習内容チェックシート点とは、提出した学習内容チェックシートに「確認」印が押されたものを 1 点と数えたときの合計のことで、7 月 22 日 (水)18 時までに提出された分が対象です。
  不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。
- 成績は「インフォメーションシステム」で、 9 月上旬に発表予定。
- 答案は「数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎２)」を受講する人には、第 1 回の授業時に返却します。そうでない人で、返却を希望する人は、9 月 24 日から 10 月 31 日の間に取りに来てください。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎１)・第 14 回 (2026 年 7 月 9 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。