No.14 2026 年 1 月 7 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

14-1. 次の各広義重積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,dxdy, \qquad D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -x < y \leq 1\ \}$

(2) $\displaystyle\int_D \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy, \qquad D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x > 0,\ y \geq 0\ \}$

14-2. $b > a > 0$ を定数とし、$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ y \geq 0\ \}$ とおく。

(1) $x > 0$ に対して $e^{-x} < \dfrac{1}{x}$ が成り立つことを用いると、

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{e^{-nx}}{x} dx = 0$$

がわかる (確認せよ)。D の近似増加列として $D_n = [a,b] \times [0,n]$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ によって与えられるものをとり、上記の事実を用いることにより、広義重積分

$$\int_D e^{-xy}\,dxdy$$

の値を計算せよ。

(2) 広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$$

の値を求めよ。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) 通信 [No.14]

2026 年 1 月 7 日発行

■ 第 13 回の学習内容チェックシート Q2 について

◦ Q1 の表の 1 番目の解答欄に、写像 $F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ が C^1-級であることの定義を書いた人が想定外に多かったです。ここに書くべきは、関数 $f(u,v)$ が C^1-級であることの定義 ([例 13-1-1] の 2 行上の「ここで、」よりあとの部分) です。

◦ Q2 の第 2 項目は重積分の極座標変換公式を書く問題でしたが、かなり多くの人が、一般の座標変換公式を書き入れていました。極座標変換とは、

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad ((r,\theta) \in \mathbb{R}^2)$$

によって与えられる特別な座標変換のことを指します。第 2 項目の枠に中には、この座標変換を用いた重積分の変換公式を書き入れてください。

■ 演習 13-1 について

極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ を用いて重積分を計算する問題でした。まずは、与えられた積分領域 D を図示するところから始めましょう。(x,y) が D 内を動くとき、動径 (= 原点からの距離) r と偏角 θ がどのような範囲を動くのかを調べます。その結果、(1) の場合 (r,θ) の動く範囲は $E = \{\ (r,\theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{3},\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\ \}$ であり、(2) の場合 $E = \{\ (r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\ \}$ であることがわかります。あとは、極座標変換を用いた重積分の公式に代入して計算するだけですが、プロセスが足りない答案、相変わらず不適切な記号 $\int_a^b \int_c^d$ を用いているい答案が多いです。[No.11] の通信にも書き、また、授業中に何度も話をしていますが、(1) の解答であれば、まず求めるべき重積分 $\int_D 5xy^2\,dxdy$ から書き始め、それを極座標変換を用いた式 $\int_E 5(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2 r\,drd\theta = \int_E 5r^4\cos\theta\sin^2\theta\,drd\theta$ に = でつなぎ、さらにそれを 1 変数関数として積分を 2 回繰り返す累次積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_1^{\sqrt{3}} 5r^4\,dr\Big)\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta$ に書き換えるというプロセスが必要です。重積分の値は、(1) が $\dfrac{27-\sqrt{3}}{4}$ であり、(2) が $-\dfrac{5\pi^2}{96}$ になります。

■ 演習 13-2 と訂正について

授業中に配布した問題に誤りがありました。(1) の問題文中の $\frac{1}{4} \leq u,v \leq 1$ は $1 \leq u,v \leq 4$ の誤り、(2) の $E = [\frac{1}{4},1] \times [\frac{1}{4},1]$ は $E = [1,4] \times [1,4]$ の誤りです。申し訳ありません。HP 上の演習問題のファイルは、修正版に差し替えていますので、再度参照してください。

本日配布した解答例は修正以前のものですが、(1) については全く変更する必要はありません。(2) については、$\int_D xy\,dxdy = \int_E (u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}})(u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}})\dfrac{1}{3}\,dudv = \dfrac{1}{3}\int_E uv\,dudv$ までは全く同じです。ここから先の計算が違ってきますが、$\frac{1}{4}$ を 1 に、1 を 4 に置き換えて同じ方法で計算し、$\int_D xy\,dxdy = \dfrac{5}{4}$ が得られます。

■ 次回予告

次回は最終回で、テーマは条件付き極値問題です。この問題を解決するための方法として知られている、ラグランジュの未定乗数法を学びます。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 14 回 (2026 年 1 月 7 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません)。