

線形代数 1 演習問題

15-1. (固有値の重複度と対角化可能性)

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 2 & 16 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値とその重複度を求めよ。
- (2) A の重複度 2 の固有値に対して、その固有値に属する固有ベクトルを求めよ。
- (3) (i) A は対角化可能か否かを簡単な理由をつけて答えよ。
(ii) さらに、 A が対角化可能なときには、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P の作り方を述べ、
(iii) そのとき $P^{-1}AP$ がどのような対角行列になるのかを答えよ。

■ 第14回学習内容チェックシートについて

- Q1の固有ベクトルの定義を記述する欄に、「 $\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{p} が存在するときの \mathbf{p} を……」という解答が多かったです。固有ベクトルの定義においては、それが「存在する・存在しない」ということは問わないので、 $\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{p} のこと、のように書いてください。
- Q2の1番目の問いは「 n 次正方行列 A の固有値を求めるには？」というものでした。単に「 $\Delta_A(x) = 0$ を解く」とだけではなく、「固有多項式 $\Delta_A(x)$ を計算し、 $\Delta_A(x) = 0$ を x について解く。その解が A の固有値である。」のように書いてください。

■ 演習 14-1 について

(1) 与えられた行列 A はどの成分も大きな数なので、 $\Delta_A(x)$ をサラスの方法で展開してしまうと計算時間もかかり、また、計算ミスをしがちです。いつも言っているように、工夫して計算しましょう。いろいろな方法がありますが、第1行に足しあげてみましょう。すると、第1行に $x-4$ が揃うのでそれをくくり出すことができます。次に、 $\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2}$, $\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{3}$ を行い、第1行に関して余因子展開します。このようにして計算することで、 $\Delta_A(x) = (x-4)^2(x-8)$ のように因数分解されることがわかり、 A の固有値は $4, 8$ であることがわかります。

(2) \mathbf{Ap} が \mathbf{p} の定数倍になっているかどうか、つまり、ある固有値 λ を使って $\mathbf{Ap} = \lambda\mathbf{p}$ と書けるかどうかを調べます。 $\mathbf{Ap} = \begin{pmatrix} 228 \\ -428 \\ 240 \end{pmatrix}$ ですが、これは $4\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ にも $8\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 40 \end{pmatrix}$ にも一致しないので、 \mathbf{p} は A の固有ベクトルになっていないと結論づけることができます。

■ 演習 14-2 について

まず、 A の固有値を求めるために、 $\Delta_A(x) = \begin{vmatrix} x-7 & 6 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}$ を計算します。

$\Delta_A(x) = (x-1)(x-4)$ のように因数分解されるため、 A の固有値は $1, 4$ です。

次に、固有ベクトルを求めます。まず、 1 に属する固有ベクトルを求めましょう。 $1 \cdot E_2 - A$ は、行基本変形により

$$1 \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} 1-7 & 6 \\ -3 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のようになるため、方程式 $-x+y=0$ を解きます。この方程式の実数解は $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) ですが、零ベクトルは固有ベクトルとは呼ばないため、この実数解から零ベクトルを除いて、固有値 1 に属する A の固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}, t \neq 0$) により与えられることがわかります。同様にして、固有値 4 に属する A の固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}, t \neq 0$) により与えられることがわかります。

ほとんどの人は行列 $()$ と行列式 $| |$ の使い分けができていますが、10名弱の人が混同した解答を書いていました。再度注意しておきますが、**行列と行列式は別物(計算ルールも考え方も違う)** ので、**両者を適切に使い分けて読み書きしなければなりません!** 固有多項式 $\Delta_A(x)$ は行列式なので、計算では $| |$ を使って等号 $=$ で結んでいきますが、固有値 λ に属する固有ベクトルの計算では、係数行列 $\lambda E_2 - A$ の行基本変形を行うので、 $()$ を使って矢印 \rightarrow で結んでいきます。

■ 線形代数 1 の試験について

- 実施日時：2024 年 7 月 26 日（金）第 2 時限（11 時 30 分～12 時 50 分、80 分）
- 実施教室：2101
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください（学生証を忘れると、受験することができません！）。
- 黒のボールペンまたは黒のインキ（容易に消すことができないもの）と鉛筆またはシャープペン（色は黒）を用意してください。
学籍番号、氏名欄には黒のボールペンまたは黒のインキを使用して書きます。
解答欄には鉛筆またはシャープペン（色は黒に限る）を使用して書きます。
- 試験中のスマートフォン、携帯電話、ipod、ウェアラブル端末などの電子機器の使用は認められていません（時計代わりの使用も不可）。試験開始前に音や振動が出ないように設定して、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 机の両端に離れて着席してください。
- 試験範囲：§1 から §15 まで。
行列式の計算、行列の階数の計算、逆行列の計算、行列の正則性の判定やベクトルの一次独立性の判定、行列式の性質、行列の固有値の問題を中心に出题。
充分に問題練習と（線形代数 1 通信のコメントや学習内容チェックシートも含めて）復習をして、試験に臨みましょう。
- 試験答案において、記号の使い方には気をつけてください。特に、行列 () で書くべきところを行列式 $| |$ で書いている、あるいは、その逆になっている場合には、たとえ計算ができていても、その小問の得点は 0 点になります。“ $\times - 2$ ” などの記号の不適切な使い方もまた 0 点になります。
ベクトルを太字で表していない、行列の基本変形で $=$ を使う、行列式の計算で \rightarrow を使う、などの記号の不適切な使い方は減点の対象になり得ます。
- 今日の提出物は 7 月 20 日（土）の 12 時～15 時の間に和久井の研究室まで取りに来てください。第 14 回以降の学習内容チェックシートで「要再提出」の印が押されているものについては、7 月 25 日（木）17 時までに提出すれば受け付けて、正しく修正されていれば加点します。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、平常点（(演習点) + (チェックシート点) - (注意・不正点)）を加算した数値を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます（0.5 \rightarrow 1）。
その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合には不合格になります。
※チェックシートによる得点とは、提出したチェックシート用紙に「確認」印が印されたものを 1 点と数えたときの合計のことで、7 月 25 日 17 時までに提出された分が対象です。
不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。

線形代数1・第15回(2024年7月18日)演習問題解答シート

学籍番号 _____ 氏名 _____

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください(答えのみは評価しません)。