

■ 第 14 回学習内容チェックシートについて

- Q1 の 2 番目の表では、「 $\Delta_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ となるとき m_i 」という解答が多かったです。固有値を指定しなければ、重複度は意味を持たないので、「固有値 λ_i の重複度とは m_i のこと」のように固有値を明記する必要があります。
- Q3(1) では、要点がずれた解答が多かったです。与えられた固有多項式の情報から、重複度が 2 以上の A の固有値は β のみで、その重複度は 2 です。したがって、 A が対角化可能か否かを調べるには、固有値 β に属する固有ベクトルの中から一次独立な組をなすベクトルを 2 個選ぶことが出来るか否かを調べればよく、2 個選ぶことが出来れば対角化可能であり、そうでなければ対角化不可能になります。このことを書いてください。
- Q3(2) における正則行列 P は A の固有ベクトルを 3 個並べて作りますが、単に並べても正則になる保証はありません。正則になるようにするには、固有値 α に属する固有ベクトルの中から 1 個のベクトル $\mathbf{p}_1$ を選び、 β に属する固有ベクトルの中から一次独立な組をなす 2 個のベクトル $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を選んで、 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ と並べます。この場合、 $P^{-1}AP$ は、対角成分に上から α, β, β が並ぶ対角行列になります。

■ 演習 14-1 について

この問題は 3 点満点で採点しました。

(1) 固有多項式を計算すると、 $\Delta_A(x) = (x - 11)^2(x - 14)$ のように因数分解されるので、 A の固有値は 11 と 14 であり、重複度はそれぞれ 2 と 1 です。

(2) 重複度が 2 の固有値 11 に属する A の固有ベクトルを求めます。まず、連立一次方程式 $(11E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の実数解を求めます。係数行列をガウスの消去法に基づいて行基本変形して、実数解は $s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$ によって与えられることがわかります。これより、固有値

11 に属する固有ベクトルは、零ベクトルを除いて、 $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}, (s, t) \neq (0, 0))$ で与えられます。

連立一次方程式を解く際に、ある列の定数倍を他の列に加えるという列基本変形を使っている人が何人も出始めました。この列基本変形は、連立一次方程式で解釈すれば、ある変数の定数倍を他の変数に加えるという操作になります。これでは、正しい解を得ることができないのは当然です。連立一次方程式を解いたり、逆行列を求める際に、行列を利用するときには「行基本変形」しか行なえないことに十分注意してください。

(3) 問題の行列 A の場合、(2) により重複度 2 の固有値 11 に属する固有ベクトルの中から 2 個からなる一次独立なベクトルの組として、“ $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ” を選ぶことができるので、 A は対角化可能ことがわかります。 $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P は、先に選んだ固有値 11 に属する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ に、 A の固有値 14 に属する固有ベクトル $\mathbf{p}_3$ を加えて、 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ において作ることができます。このとき、 $P^{-1}AP$ は対角成分に上から 11, 11, 14 が順に並ぶ対角行列になります。ここに並ぶ固有値の順番は、 P の構成において固有ベクトルをどんな順番で並べたのかに応じて変わります。例えば、もし、 $P = (\mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ と定めた場合には、 $P^{-1}AP$ は対角成分に上から 14, 11, 11 が順に並ぶ対角行列になります。