No.15 2025 年 1 月 16 日

線形代数 2 演習問題

15-1. (一次独立性の判定)

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V において “v_1, v_2, v_3” が一次独立であるとき、

(1) “$v_1 + 4v_2 + 2v_3,\ v_1 + 8v_2 + 4v_3,\ v_1 + 12v_2 + 6v_3$” は一次独立か？

(2) “$4v_1 + 2v_2 + 3v_3,\ 2v_1 + 3v_2 + 4v_3,\ 3v_1 + 4v_2 + 2v_3$” は一次独立か？

15-2. (基底の変換の下での不変量)

2 次以下の実係数多項式全体の成すベクトル空間

$$\mathbb{R}[x]_2 = \{\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\ \}$$

を考える。線形変換 F を

$$F : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2, \qquad F(f(x)) = (x+5)f'(x) - 2f(x) \quad (f(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

により定義する。ここで、$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

F のトレース $\mathrm{Tr}\, F$ を計算せよ。

線形代数２通信　[No.15]　2025年1月16日発行

■ 演習 14-1 について

(1) 事前練習用問題 pre14-1 の (1) の略解と全く同じことを書けば正解です。

(2)
$$\begin{aligned} T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) &= \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \{a_{n+2}\}_{n=1}^{\infty} \\ &= (a_2+a_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_3+a_4)\boldsymbol{e}_2 + (a_4+a_5)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

のように表わされることから、

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{e}_1) &= 0\boldsymbol{e}_1 + 36\boldsymbol{e}_2 - 108\boldsymbol{e}_3, \\ T(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3, \\ T(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 21\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

がわかり、V の基底 $\mathscr{B} =$ “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” に関する T の行列表示

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 36 & 9 & -3 \\ -108 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

が得られます。この行列表示が求めらなかった人がとても多かったです。単なる計算ミスで正解に至らなかったのであればあまり問題ないのですが、縦と横が逆になっていたり、配列がおかしい答案も少なくありませんでした。行列表示が正しく求められないと、これ以降の問題はすべて間違いとなり、得点につながりません。できなかった人はよく勉強しておいてください。

(3) いつものように、固有多項式 $\varDelta_A(x) = |xE_3 - A|$ を計算します。3 次だからといってすぐに行列式を展開せず、工夫して計算してください。例えば、第 2 列の -1 倍を第 3 列に加えると、第 3 列から $x-12$ をくくり出すことができます。次に、第 3 行の 1 倍を第 2 行に加えて第 3 列に 0 を増やします。その後で第 3 列に関して余因子展開をします。このようにして計算すると、$\varDelta_A(x) = (x-12)^2(x-6)$ が求まり、A の固有値は $6, 12$ であることがわかります。

固有値 6 に属する A の固有ベクトルは、連立一次方程式 $(6E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解き、そこから零ベクトルを除くことにより、$t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)$ により与えられ、固有値 12 に属する A の固有ベクトルは、連立一次方程式 $(12E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解き、そこから零ベクトルを除くことにより、$s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R},\ (s,t) \neq (0,0))$ により与えられることがわかります。

(4) 固有値 6 に属する A の固有ベクトルの中から一次独立となるベクトルの組として、“$\mathbf{p}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$” を選び、固有値 12 に属する A の固有ベクトルの中から一次独立となるベクトルの組として、“$\mathbf{p}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$” を選びます。すると、“$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$” は A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の基底となります。$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を V の基底 $\mathscr{B} =$ “$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$” に関する座標系とすると、

$$\mathscr{B}' := \text{“}\Phi^{-1}(\mathbf{p}_1) = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 9\boldsymbol{e}_3,\ \Phi^{-1}(\mathbf{p}_2) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,\ \Phi^{-1}(\mathbf{p}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 12\boldsymbol{e}_3\text{”}$$

は T の固有ベクトルからなる V の基底であり、この基底に関する T の行列表示は $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ となります。

なお、(1), (2), (3), (4) の配点はそれぞれ $0.5, 1, 1.5, 1$ で、4 点満点になっています。

■ 第 14 回の学習内容チェックシートについて

Q3 の出来が悪かったです。

∘ Q3 の最初の枠に対する解答として、「A の固有値」「固有ベクトル」「$\Delta_A(x) = 0$ の実数解」といった、全く見当違いの誤答が多数ありました。

座標系 $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は、V と $\mathbb{R}^n$ を結ぶ翻訳装置であることを思い出してください。V における線形現象は Φ を通じて $\mathbb{R}^n$ における線形現象に翻訳することができ、その逆も可能です。今の問題設定の場合、$\mathbb{R}^n$ において固有空間 $W(\lambda, T_A)$ の 1 組の基底 "$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m$" が与えられているときに、$T$ の固有空間 $W(\lambda, T)$ の基底をどうやって求めるのかを答えるのですが、Φ の下で $W(\lambda, T)$ は $W(\lambda, T_A)$ に対応しているのですから、「線形同型写像は基底を基底に写す」ということを使って、$W(\lambda, T)$ の 1 組の基底が "$\Phi^{-1}(\mathbf{p}_1), \cdots, \Phi^{-1}(\mathbf{p}_m)$" により与えられるわけです。

∘ Q3 の第 2 項目には、今日の授業で初めて扱った基底の変換行列とその記法が使われていました。例年、今日の内容を第 14 回目に教えて、先週の内容を第 15 回目に教えていたのですが、手違いで順番を逆にしてしまった上、修正ができていなかったために、上述のようなことになってしまいました。申し訳ないです。

Q3 の最後の 4 つの枠について説明します。まず、(今日学んだ) 基底の変換行列の定義により、$\mathscr{B} =$ "$v_1, \ldots, v_n$" から $\mathscr{A} =$ "$e_1, \ldots, e_n$" への基底の変換行列 P は $(v_1 \ \cdots \ v_n) = (e_1 \ \cdots \ e_n)P$ が成立します。この両辺に右から P^{-1} を掛けて、右辺と左辺を入れ替えると $(e_1 \ \cdots \ e_n) = (v_1 \ \cdots \ v_n)P^{-1}$ が得られます。したがって、この両辺に T を作用させて $\big(T(e_1) \ \cdots \ T(e_n)\big) = \big(T(v_1) \ \cdots \ T(v_n)\big)P^{-1}$ が成り立ち、さらに続けて何回も T を作用させることにより、$\big(T^k(e_1) \ \cdots \ T^k(e_n)\big) = \big(T^k(v_1) \ \cdots \ T^k(v_n)\big)P^{-1}$ が成り立つことがわかります。ここで、v_j は $T(v_j) = \lambda_j v_j$ を満たすので、

$$
\begin{aligned}
T^2(v_j) &= T(T(v_j)) = T(\lambda_j v_j) = \lambda_j T(v_j) = \lambda_j^2 v_j, \\
T^3(v_j) &= T(T^2(v_j)) = T(\lambda_j^2 v_j) = \lambda_j^2 T(v_j) = \lambda_j^3 v_j, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
T^k(v_j) &= T(T^{k-1}(v_j)) = T(\lambda_j^{k-1} v_j) = \lambda_j^{k-1} T(v_j) = \lambda_j^k v_j
\end{aligned}
$$

となります (このように k 乗を容易に計算できるのが、固有ベクトルを考えるメリットの一つです)。

上述のことから、$P^{-1} = (q_{ij})$ とおくと、$T^k(e_j)$ が

$$T^k(e_j) = q_{1j}T^k(v_1) + \cdots + q_{nj}T^k(v_n) = q_{1j}\lambda_1^k v_1 + \cdots + q_{nj}\lambda_n^k v_n$$

のように求められます。

線形代数２の試験について 2025 年 1 月 16 日

- 実施日時：2025 年 1 月 28 日（火）第 2 時限（11 時 30 分〜12 時 50 分、80 分）
- 実施教室：2101
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください (学生証を忘れると、受験することができません！)。
- 黒のボールペンまたは黒のインキ（容易に消すことができないもの）と鉛筆またはシャープペン（色は黒）を用意してください。
  学籍番号、氏名欄には黒のボールペンまたは黒のインキを使用して書きます。
  解答欄には鉛筆またはシャープペン（色は黒に限る）を使用して書きます。
- 試験中のスマートフォン、携帯電話、ipod、ウェアラブル端末などの電子機器の使用は認められていません (時計代わりの使用も不可)。試験開始前に電源を切り、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 試験範囲：§1 から §15 まで（演習問題で言えば、No.1 から No.15 まで）
  線形写像の行列表示、ベクトルによって張られる空間の基底と次元、一次独立か否かを調べる問題、部分空間であるか否かを示す問題、固有値の問題を中心に出題。
  充分に問題練習、復習して試験に臨みましょう。
- **今日の提出物は 1 月 17 日 (金) の 12 時 00 分〜13 時 30 分**の間に和久井の研究室で**返却**します。第 14 回以降の学習内容チェックシートで「要再提出」の印が押されているものについては、1 月 27 日 (月)14 時 30 分までに和久井の研究室まで持ってきてください。正しく修正されていれば平常点に加点します。直接手渡しを原則としますが、留守の場合には研究室に備え付けのポストに入れておいてください。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、平常点を加算した合計を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます ($0.5 \to 1$)。その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合は不合格です。
  ※平常点とは、演習点と学習内容チェックシート点 (「確認」印が押されたものを 1 点、「要再提出」で終わった場合には 0.5 点を加算した合計) から不正点を引いた合計のことです。
  不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。
- 答案の返却を希望する人は、3 月 12 日から 4 月 30 日の間に取りに来てください。

線形代数２・第 15 回 (2025 年 1 月 16 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 __________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。