No.15 2026年1月19日

線形代数4 演習問題

15-1. 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ に対して、Jordan 標準形と、A を Jordan 標準形に変換する正則行列 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ を1つ求めよ。

線形代数４通信 [No.15]

2026年1月19日発行

■ 第14回の学習内容チェックシートについて

全体的にできているシートが多かったですが、Q2(iii) の出来が若干悪かったので説明します。

$T(v)$	u	w
v		

条件を満たす基底は、右図のように、Young 図形 $\mathrm{Young}(T)$ に当てはめて構成することができます。まず、$\dim W_2 - \dim W_1 = d_2 = 1$ より $W_2 = W_1 \oplus \langle v \rangle$ となる $v \in V$ を取ります。T で写して $W_1 \supset W_0 \oplus \langle T(v) \rangle$ となりますが、$\dim W_1 - \dim W_0 = d_1 = 3$ より $W_1 = W_0 \oplus \langle T(v), u, w \rangle$ となる $u, w \in W_1$ を取ることができます。このとき、$\mathscr{B} =$ “$T(v), v, u, w$” は V の基底をなし、この基底に関する T の行列表示は Jordan 標準形 $J(0,2) \oplus J(0,1) \oplus J(0,1)$ になります。

■ 演習 14-1 について

(1) $\mathbb{C}^5$ の標準基底 “$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_5$”をとって pre14-1(1) のヒントと略解のように計算することにより、$N^3 = \mathrm{O}$(零行列) になることがわかります。よって、N は冪零行列です。

(2) 各整数 $i \geq 0$ に対して $W_i := \mathrm{Ker}(T_N^i : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5)$ とおき、$i \geq 1$ に対して $d_i = \dim W_i - \dim W_{i-1}$ とおくと、次元公式より

$$d_i = (5 - \mathrm{rank}\, N^i) - (5 - \mathrm{rank}\, N^{i-1}) = \mathrm{rank}\, N^{i-1} - \mathrm{rank}\, N^i$$

となることがわかります。計算により、$\mathrm{rank}\, N^0 = 5,\ \mathrm{rank}\, N = 3,\ \mathrm{rank}\, N^2 = 1,\ \mathrm{rank}\, N^3 = 0$ が求められ、$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 1$ であることがわかります。よって、冪零変換 T_N が定める Young 図形は次のようになります：

$$\mathrm{Young}(T_N) = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

このYoung 図形を縦のブロックごとに見て、N の Jordan 標準形は $J(0,3) \oplus J(0,2)$ になることがわかります。

(3) 次の $(*)$ を満たす $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^5$ を求めることができれば、N を Jordan 標準形に変換する正則行列 P の 1 つが $P = (N^2\mathbf{v}\ N\mathbf{v}\ \mathbf{v}\ N\mathbf{u}\ \mathbf{u})$ により与えられます。

$$(*) \qquad W_3 = W_2 \oplus \langle \mathbf{v} \rangle, \quad W_2 = W_1 \oplus \langle N\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

この条件は、

$$① \ \mathbf{v} \notin W_2, \quad ② \ \mathbf{u} \in W_2, \quad ③ \ \mathbf{u} \notin W_1 \oplus \langle N\mathbf{v} \rangle$$

と同値です。W_2, W_1 をそれぞれ連立一次方程式 $N^2\mathbf{x} = \mathbf{0},\ N\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて求めると、

$$W_2 = \{\ t_1(\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_1) + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3 + t_4\mathbf{e}_4 \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{C}\ \},$$
$$W_1 = \{\ s(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) + t\mathbf{e}_4 \mid s, t \in \mathbb{C}\ \}$$

となることがわかるので、例えば $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{u} = \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_1$ と選ぶことができ、そのとき P は次式で与えられます。

$$P = (\mathbf{e}_4\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1\ \ {-\mathbf{e}_2} + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\ \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

線形代数 4 の試験について 2026 年 1 月 19 日

- 実施日時：2026 年 1 月 26 日（月）第 2 時限（11 時 30 分～12 時 50 分、80 分）
- 実施教室：2202
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください (学生証を忘れると、受験することができません！)。
- 黒のボールペンまたは黒のインキ（容易に消すことができないもの）と鉛筆またはシャープペン（色は黒）を用意してください。
  学籍番号、氏名欄には黒のボールペンまたは黒のインキを使用して書きます。
  解答欄には鉛筆またはシャープペン（色は黒に限る）を使用して書きます。
- 試験中のスマートフォン、携帯電話、ウェアラブル端末などの電子機器の使用は認められません (時計代わりの使用も不可)。試験開始前に音や振動が出ないように設定して、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 机の両端に離れて着席してください。
- §5(ベクトル空間の公理) から §15(Jordan 標準形とその応用) まで (演習問題で言えば、No.5 から No.15 まで)
  一次独立性の判定問題、部分空間であるか否かを示す問題、直和の定義を問う問題および証明問題、線形変換の行列表示、固有値を求める問題、Jordan 標準形を求める問題などを出題。
  充分に問題練習と（線形代数 4 通信のコメントや学習内容チェックシートも含めて）復習をして、試験に臨みましょう。
- **今日の提出物は 1 月 21 日 (水) の 12 時 00 分～16 時 20 分**の間に和久井の研究室で**返却**します。第 13 回以降の学習内容チェックシートで「要再提出」の印が押されているものについては、1 月 23 日 (金)18 時までに提出すれば受け付けて、正しく修正されていれば加点します。直接手渡しを原則としますが、留守の場合には研究室に備え付けのポストに入れておいてください。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、((演習点) + (チェックシート点) − (注意・不正点)) を加算した数値を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます (0.5 → 1)。その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合は不合格です。
  ※チェックシートによる得点とは、提出したチェックシート用紙に「確認」印が印されたものを 1 点と数えたときの合計のことで、1 月 23 日 (金)18 時までに提出された分が対象です。
  不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。
- 答案の返却を希望する人は、3 月の成績発表日から 4 月 30 日の間に取りに来てください。

線形代数４・第 15 回 (2026 年 1 月 19 日) 演習問題解答シート

学　籍　番　号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏　名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。