

■ 第 14 回の学習内容チェックシートについて

- Q1 の 2 番目の問題については、右側極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ の定義を尋ねられているのに、「 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ を関数 $f(x)$ ($x \in S$) の a における右側極限とよぶ」と答えたシートがありました。この α がどのように決まるものなのかを、数列の極限を使って書かなければなりません。Q1 の 1 番目の解答を利用して「上記のように定まる一定の実数 α のこと」と答えるか、あるいは、「 $a < x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ を満たす S 内の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ のこと」と答えるようにしましょう。
- Q1 の 3 番目では $(a, b]$ 上で広義積分可能であることの定義を書かなければなりませんが、 $[a, b]$ 上での広義積分の定義を書き入れたシートが非常に沢山ありました。また、「 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ を定義域に含む連続関数 $f(x)$ に対して」など余計な文が入っているものもありました。これらはすでに問題文において設定されているので、改めて書く必要はありません。解答のスペースは限られていますから、適切な量で端的に答えを書き入れてください。同様のことは Q1 の 4 番目の問いについても当てはまります。
- Q3(1) では、単に $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x)dx$ を求める、とだけの解答がありました。まず何をして(十分大きな R に対して定積分 $\int_a^R f(x)dx$ を計算)、次に何をするのか($R \rightarrow +\infty$ としてその定積分の極限をとる)、のように順序立てて書いてください。

■ 演習 14-1 について

(1) では、まず、 $R > 0$ として $\int_0^R x^3 e^{-x^2} dx$ を計算します。この定積分を $\int_0^R x^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' dx$ と見て、部分積分により計算すると $-\frac{R^2+1}{2e^{R^2}} + \frac{1}{2}$ が得られます。 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ を用いて $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\frac{R^2+1}{2e^{R^2}} + \frac{1}{2}\right)$ を計算することにより、与えられた広義積分は存在して、その値は $\frac{1}{2}$ であることがわかります。

(2) では、まず、 $R > 0$ として $[0, R]$ 上での定積分を計算します。 $((1+8x^2)^{-\frac{1}{2}})' = -8(1+8x^2)^{-\frac{3}{2}}$ より被積分関数の原始関数がわかり、それを用いて $\int_0^R \frac{x}{(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{1}{8}(1+8R^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}$ を得ることができます。 $R \rightarrow +\infty$ とすることで、与えられた広義積分は存在して、その値は $\frac{1}{8}$ であることがわかります。

(1) でも (2) でも $+\infty$ を数であるかのように扱っている答案が多かったです。定義に従い、有限閉区間 $[0, R]$ 上で定積分を計算してから、 $R \rightarrow +\infty$ というプロセスをとってください。

■ 演習 14-2 について

(1) は答えのみ記しますが、 $x^{p-1} \geq 1$, $0 \leq (1-x)^{q-1} < 1$ となります。

(2) は、 $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ ($x \in (0, 1]$) において広義積分の収束判定法を使って示します。 x が $0 < x \leq 1$ の範囲を動くとき、 $x^\alpha f(x) = x^{\alpha+p-1}(1-x)^{q-1}$ が一定の値で抑えられるような $\alpha < 1$ を探すわけですが、(1) で求めた x^{p-1} と $(1-x)^{q-1}$ の取り得る値の範囲から、 $\alpha = 1-p$, $M = 1$ とすれば、 $x^\alpha f(x) = x^{\alpha+p-1}(1-x)^{q-1} = (1-x)^{q-1} < 1 = M$ となり、条件が満たされることがわかります。