No.15 2026 年 1 月 14 日

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎 2) 演習問題

15-1. ラグランジュの未定乗数法を用いて、制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で、関数 $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ の最大値を求めよ。

ヒント：ラグランジュの未定乗数 λ を含む 2 つの等式の差と和を計算する。

15-2. C^1-級関数 $g(x, y) = (x^2 + 2y)^2 - 4x^2(y + 1)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ について考える。$(a, b) = (\sqrt{2}, -1)$ の近くで、方程式 $g(x, y) = 0$ の解が $(x, \phi(x))$ によって与えられるような、(a, b) のまわりの陰関数 $\phi(x)$ $(x \in I)$ が存在することを示し、その導関数を ϕ を用いて表わせ。

数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎2)通信 [No.15]

2026年1月14日発行

■ 第14回の学習内容チェックシートについて

- ◦ Q1の例1には、[例14-1-2](1)で与えられている D_n を描けばよく、これについてはほぼ全員正解でした。一方、例2の答案として、$D_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$ を挙げたものが圧倒的に多かったですが、$n=2$ のとき D からはみ出してしまうため、近似増加列であるための条件②を満たしません。そこで、曲線 $y = \dfrac{1}{nx}$ と2直線 $x=1,\ y=1$ によって囲まれた図形（境界を含む）を考えてみましょう。
- ◦ Q3の最初の枠に、$f(x,y) \geq 0$ とだけ書いたシートが多かったですが、「すべての $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) \geq 0$」のように正確に書いてください。
- ◦ Q3の2番目の枠に入るべきものは $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$ です。第14回の授業用アブストラクトに加筆しましたので、そちらも参考にしてください。

■ 演習 14-1 について

(1)と(2)のいずれの被積分関数も非負の連続関数になっているので、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)dxdy$ が収束するような D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を1つ見つけてくれれば、その極限が広義重積分の値になります。そのような近似増加列を見つける際には、積分領域 D の図を描いて見当をつけるとよいでしょう。なお、近似増加列を与えずに、強引に重積分を計算した人が多かったですが、考え方を重視しているので、そのような答案は0点にしています。

(1)については、被積分関数が直線 $-x=y$ 上で定義されないことに注意し、有界閉集合 D_n を例えば、$D_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -x+\frac{1}{n} \leq y \leq 1 \}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ のようにとります。すると、広義重積分の値が次のように求められます。

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(\int_{-x+\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,dy\right)dx = \cdots = \frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}.$$

(2)については D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ として

$$D_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ \tan\!\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)x \geq y \geq 0 \right\} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって与えられるものをとります(これも D の図を描いて見つけます)。極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により $E_n = [1,2] \times [0, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}]$ は D_n に写されるので、重積分の極座標変換公式を用いて、広義重積分の値 $\dfrac{3}{16}\pi^2$ が求められます。

■ 演習 14-2 について

重積分 $\displaystyle\int_{D_n} e^{-xy}\,dxdy$ を $\displaystyle\int_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \int_a^b \left(\int_0^n e^{-xy}\,dy\right)dx$ の順番で計算し、問題文の極限の公式を用いることで、$\displaystyle\int_D e^{-xy}\,dxdy = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\!\left(\frac{b}{a}\right)$ が得られます。一方、$\displaystyle\int_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \int_0^n \left(\int_a^b e^{-xy}\,dy\right)dx$ の順番で計算することで、$\displaystyle\int_D e^{-xy}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{-e^{-by}+e^{-ay}}{y}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ が得られます。広義重積分を仲介にして、(2)で要求されている1変数関数の広義積分の値が $\log\!\left(\dfrac{b}{a}\right)$ となることがわかるというわけです。

■ 定期試験に向けて

今回で講義は終了です。充分に問題練習と復習をして、定期試験に臨みましょう。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２)・第 15 回 (2026 年 1 月 14 日) 演習問題解答シート

学 籍 番 号 ________________ 氏 名 ____________________________

※自分の解答を以下に書いてください。書ききれない場合には、裏面に続けてください。解答には、答えだけでなく、適宜、途中の式や考察を含めてください（答えのみは評価しません）。

数学を学ぶ (関数と微分積分の基礎２) の試験について 2026 年 1 月 14 日

- 実施日時：2026 年 1 月 27 日（火）第 5 時限（16 時 30 分〜17 時 50 分、80 分）
- 実施教室：2102
- 試験当日は学生証を持参し、着席と同時に写真が見えるように机に置いてください (学生証を忘れると、受験することができません！)。
- 黒のボールペンまたは黒のインキ（容易に消すことができないもの）と鉛筆またはシャープペン（色は黒）を用意してください。
  学籍番号、氏名欄には黒のボールペンまたは黒のインキを使用して書きます。
  解答欄には鉛筆またはシャープペン（色は黒に限る）を使用して書きます。
- 試験中のスマートフォン、携帯電話、ipod、ウェアラブル端末などの電子機器の使用は認められていません (時計代わりの使用も不可)。試験開始前に音や振動が出ないように設定して、かばんの中にしまってください。
- ノート、教科書、参考書、辞書、電卓類の持ち込みは不可。
- 机の両端に離れて着席してください。
- 試験範囲：§4 から §14 まで（演習問題で言えば、No.4 から No.14 まで）
  連鎖定理を使った偏微分の計算問題、極値問題、重積分の計算問題を中心に出題。
  充分に問題練習と（関数と微分積分の基礎２通信のコメントや学習内容チェックシートも含めて）復習をして、試験に臨みましょう。
- **今日の提出物は 1 月 21 日 (水) の 12 時 00 分〜16 時 20 分**の間に和久井の研究室で**返却**します。第 13 回以降の学習内容チェックシートで「要再提出」の印が押されているものについては、1 月 23 日 (金)18 時までに提出すれば受け付けて、正しく修正されていれば加点します。直接手渡しを原則としますが、留守の場合には研究室に備え付けのポストに入れておいてください。
- 成績算出方法：試験は 100 点満点とし、試験の得点に、((演習点) + (チェックシート点) − (注意・不正点)) を加算した数値を最終成績とします。但し、合計が 100 を超えた場合は 100 を最終成績とし、また、小数点以下の数字は切り上げます ($0.5 \to 1$)。その結果、60 以上あれば合格、59 以下の場合は不合格です。
  ※チェックシートによる得点とは、提出したチェックシート用紙に「確認」印が印されたものを 1 点と数えたときの合計のことで、1 月 23 日 (金)18 時までに提出された分が対象です。
  不正解であっても部分点を出せる可能性があります。考えたことをできるだけ答案に書くようにしてください。
- 答案の返却を希望する人は、3 月の成績発表日から 4 月 30 日の間に取りに来てください。