

■ 第 15 回学習内容チェックシートについて

- Q2 の最後の枠の出来があまりよくありませんでした。 A のすべての固有値 λ_i に対して、 λ_i に属する固有ベクトルの中から、一次独立な組をなすベクトルを重複度の数分だけ取り出すことができれば A は対角化可能であり、そうでないとき対角化不可能となります。したがって、 A のすべての固有値 λ_i について $m_i = d_i$ となることが、 A が対角化可能であるための必要十分条件です。
- Q3 は、与えられた設定のもとではなく、一般の状況で答えているものがありました。
- (1) 与えられた固有多項式の情報から、重複度が 2 以上の A の固有値は β で、重複度は 2 です。したがって、 A が対角化可能か否かを調べるには、固有値 β に属する固有ベクトルの中から一次独立な組をなすベクトルを 2 個選ぶことが出来れば対角化可能であり、そうでなければ対角化不可能になります。(1) にはこのことを書いてください。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P は、 A の固有ベクトルを 3 個並べて作りますが、単に並べても正則になる保証はありません。条件を満たすようにするには、固有値 α に属する固有ベクトルの中から 1 個のベクトル \mathbf{p}_1 を選び、 β に属する固有ベクトルの中から一次独立な組をなす 2 個のベクトル $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を選んで、 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ と並べて作ります。この場合、 $P^{-1}AP$ は対角成分に上から α, β, β が並ぶ対角行列になります。

■ 演習 15-1 について

- (1) 固有多項式を計算すると、 $\Delta_A(x) = (x - 11)(x - 12)^2$ のように因数分解されるので、 A の固有値は 11 と 12 であり、重複度はそれぞれ 1 と 2 です。
- (2) 重複度が 2 の固有値は 12 なので、12 に属する A の固有ベクトルを求めます。まず、連立一次方程式 $(12E_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解き、その実数解を求めます。係数行列をガウスの消去法に基づいて行基本変形して計算して、その実数解は $s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbb{R}$) によって与えられることがわかります。この中には $\mathbf{0}$ が含まれるので、それを除いたものが固有値 12 に属する固有ベクトルになります。すなわち、固有値 12 に属する固有ベクトルは $s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbb{R}, (s, t) \neq (0, 0)$) で与えられます。
- (3) 固有値の定義より、どの固有値にも固有ベクトルは必ず存在するので、対角化可能か否かを調べる際には、重複度 1 の固有値については何も調べることはありません。問題は、重複度が 2 以上の固有値に対して、それに属する固有ベクトルの中から一次独立なベクトルが重複度分だけとれるか否かです。問題の行列 A の場合、(2) により重複度 2 の固有値 12 に属する固有ベクトルの中から 2 個からなる一次独立なベクトルの組として、“ $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ” を選ぶことができるので、 A は対角化可能なことがわかります。 $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則行列 P は、先に選んだ固有値 12 に属する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ に、 A の固有値 11 に属する固有ベクトル \mathbf{p}_3 を加えて、 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ とおいて作ることができます。このとき、 $P^{-1}AP$ は対角成分に上から 12, 12, 11 が順に並ぶ対角行列になります。ここに並ぶ固有値の順番は、 P の構成において固有ベクトルをどんな順番で並べたのかに応じて変わることにご注意してください。例えば、もし、 $P = (\mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ と定めた場合には、 $P^{-1}AP$ は対角成分に上から 11, 12, 12 が順に並ぶ対角行列になります。