線形代数4通信 [No.16]

2026年1月21日発行

■ 第15回の学習内容チェックシートについて

∘ Q1(2) は A_1 の Jordan 標準形として考えられる Jordan 行列 J_1 と A_2 の Jordan 標準形として考えられる Jordan 行列 J_2 をすべて求めて、直和の形 $\begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}$ に書いて列挙したものが答えになります。固有多項式の形から、A_1 の Jordan 標準形は直和の順番を入れ替えて移りあうものは省くと $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の 2 つが考えられ、A_2 の Jordan 標準形は直和の順番を入れ替えて写りあうものは省くと $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の 2 つが考えられます。したがって、A の Jordan 標準形は全部で 4 個が考えられます。

∘ Q2(2) について説明します。(13-1 b) より、$\tilde{W}(\alpha_i)$ は $\mathrm{Ker}\,T_{(A-\alpha_i E_n)^k} = \mathrm{Ker}\,T_{(A-\alpha_i E_n)^{k+1}} = \cdots\cdots$ となる自然数 k を用いて $\tilde{W}(\alpha_i) = \mathrm{Ker}\,T_{(A-\alpha_i E_n)^k}$ により与えられますが、[補題 14-3-1] と $\dim \tilde{W}(\alpha_i) = m_i$ より、このような k の 1 つとして $k = m_i$ が見つかります。したがって、$\tilde{W}(\alpha_i)$ は連立一次方程式 $(A-\alpha_i E_n)^{m_i}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解くことによって求めることができます。

∘ Q2(3) はできていないシートが非常に沢山ありました。

(i) は [例 14-5-1] などを参考にするとわかります。但し、$T|_{\tilde{W}(\alpha_i)}$ の固有値は α_i のみなので、対角成分には α_i が並ぶことに注意しましょう。ポイントは Young 図形を縦に区切ることです。各自で考えてみてください。

(ii) は [例 14-5-1] や [例 15-3-1] を参考にすれば答えられる問題です。$T|_{\tilde{W}(\alpha_i)}$ の行列表示が Jordan 行列となる $\mathbb{R}^5$ の基底は、$\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ を適当に選んで、$\mathrm{Young}(T_{A-\alpha_i E_n}|_{\tilde{W}(\alpha_i)})$ に当てはめてつくることができます。

$(A\text{-}\alpha_i E_n)^2(\mathbf{v})$	$(A\text{-}\alpha_i E_n)(\mathbf{u})$
$(A\text{-}\alpha_i E_n)(\mathbf{v})$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{v}$	

$\mathbf{v}$ の方は $(\mathrm{Ker}\,T_{(A-\alpha_i E_n)^2}) \oplus \langle \mathbf{v} \rangle = \tilde{W}(\alpha_i)$ を満たすように選び、$\mathbf{u}$ の方は $(\mathrm{Ker}\,T_{A-\alpha_i E_n}) \oplus \langle (A-\alpha_i E_n)\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \mathrm{Ker}\,T_{(A-\alpha_i E_n)^2}$ を満たすように選びます。

■ 演習 15-1 について

計算により、$\mathit{\Delta}_A(x) = (x-2)^3$ となることがわかるので、A の固有値は 2 のみで、その重複度は 3 です。したがって、$T_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ の固有値 2 に属する広義固有空間 $\tilde{W}(2)$ の次元は 3 です。$\tilde{W}(2) \subset \mathbb{C}^3$ であり、$\dim \tilde{W}(2) = 3 = \dim \mathbb{C}^3$ なので、 $\tilde{W}(2) = \mathbb{C}^3$ になっています。

A の Jordan 標準形を求めるために、冪零変換 T_{A-2E_3} が定める Young 図形を求めます。そのために、$W_i := \mathrm{Ker}\,T_{(A-2E_3)^i}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおいて $d_i := \dim W_i - \dim W_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を計算します。$(A-2E_3)^i$ $(i = 1, 2, 3)$ を計算して行基本変形を施すと、

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 6 & 5 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times(-\frac{1}{4})} \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - 2E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
(A - 2E_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
\dim W_1 &= 3 - \mathrm{rank}\,(A - 2E_3) = 1, \\
\dim W_2 &= 3 - \mathrm{rank}\,(A - 2E_3)^2 = 2, \\
\dim W_3 &= 3 - \mathrm{rank}\,(A - 2E_3)^3 = 3
\end{aligned}
$$

がわかります。これより、$d_1 = d_2 = d_3 = 1$ が得られ、冪零変換 T_{A-2E_3} が定める Young 図形は

$$
\mathrm{Young}(T_{A-2E_3}) = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}
$$

であることがわかります。この時点で、A の Jordan 標準形は $J(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ということまでわかってしまいます。あとは、A を Jordan 標準形に変換する行列 P を求めればよいことになります。

変換行列 P を求めるために、連立一次方程式 $(A - 2E_3)^i \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ を解いて W_i を求めます。すると、次が得られます。

$$
\begin{aligned}
W_3 &= \mathbb{C}^3, \\
W_2 &= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{C} \right\}, \\
W_1 &= \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\}, \\
W_0 &= \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}
$$

ここから、Young 図形 $\mathrm{Young}(T_{A-2E_3})$ に適合する基底を求めていきます。その際、W_3 の方から考える必要があるので注意しましょう。$d_3 = 1$ であることから、$W_3 = W_2 \oplus \langle \mathbf{v} \rangle$ を満たす $\mathbf{v} \in W_3 = \mathbb{C}^3$ が存在します。$\mathbf{v}$ は W_2 に含まれない $\mathbf{0}$ でないベクトルならなんでも構いません。ここでは、最も単純な $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとってみます。すると、$d_2 = 1$ であることから、$W_2 = W_1 \oplus \langle (A - 2E_3)\mathbf{v} \rangle$ が成り立ちます。同様に、$d_1 = 1$ であることから、$W_1 = W_0 \oplus \langle (A - 2E_3)^2 \mathbf{v} \rangle = \langle (A - 2E_3)^2 \mathbf{v} \rangle$ が成り立つので、

$$
\mathbb{C}^3 = W_3 = \langle (A - 2E_3)^2 \mathbf{v}, (A - 2E_3)\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle
$$

と表わされることがわかります。そこで、

$$
P = \bigl((A - 2E_3)^2 \mathbf{v} \ (A - 2E_3)\mathbf{v} \ \mathbf{v} \bigr) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}
$$

とおきます。P は定め方から正則であって、$P^{-1}AP = J(2,3)$ を満たすことがわかります。このようにして、A を Jordan 標準形に変換する 1 つの行列 P が求められます。