数学を学ぶ(関数と微分積分の基礎2)通信 [No.16]

2026年1月21日発行

■ 第15回の学習内容チェックシートについて

- ∘ Q2の第2項目は、ラグランジュの未定乗数法を用いて、制約条件 $g(x,y)=0$ の下での関数 $f(x,y)$ の最大値を求める手順を書く問題でした。問題設定では「$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ でないとき」としていますが、この条件は無視するか、「$g(x,y)=0$ かつ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす $x,y\in\mathbb{R}$ は存在しないとき」という設定の下で解答してください。[例15-2-2]と同様の手順を書けばOKです。
- ∘ Q3の最後の枠の出来は思っていたよりも悪かったです。$-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$ が入ります。

■ 演習15-1について

この問題は、ラグランジュの未定乗数法により、x,y,λ に関する連立方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots\cdots① \\ 3x^2-y=2x\lambda & \cdots\cdots\cdots② \\ 3y^2-x=2y\lambda & \cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$

を解く問題に帰着されます。1次式ではないので、行列の基本変形に持ち込むといった方法は使えません。では、どうすれば解くことができるのでしょうか。②と③は x,y を入れ替えた関係になっているので、②+③と②−③から x,y に関して対称な式が得られそうなことに気づきます。実際、前者から、$(x+y)(3(x-y)-3-2\lambda)=0$ が得られるので、$x=-y$ か $3(x-y)-3-2\lambda=0$ のどちらかが成り立つことがわかります。

$x=-y$ のときは①と合わせて解が求まります。$3(x-y)-3-2\lambda=0$ のときは、①を使って②−③から $(2\lambda-3)(x-y)=3$ が得られるので、これと連立させて $\lambda=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x-y=1\pm\sqrt{2}$ が得られます。①と連立させれば x,y が求まりますが、$x-y=1+\sqrt{2}$ のときには①を満たす実数解が存在せず、$x-y=1-\sqrt{2}$ のときには①を満たす実数解が存在することがわかります。そこで、$x-y=1-\sqrt{2}$ のときの $f(x,y)$ の値を求めます。$f(x,y)=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3xy=(x-y)(1+xy)-3xy$ と書き換えられるので、$f(x,y)$ の値を知るには、$x-y$ と xy の値が分かれば十分です。$1=x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ に $x-y=1-\sqrt{2}$ を代入して $xy=-1+\sqrt{2}$ を得ることができます。こうして、$x-y=1-\sqrt{2}$ のときの $f(x,y)$ の値は $1-2\sqrt{2}$ であることが分かります。この値と、$x=-y$ のときの連立方程式 $(*)$ の解 (x,y) に対する $f(x,y)$ の値 $\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$ を比較すると、$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ が一番大きいので、制約条件 $x^2+y^2=1$ の下での関数 $f(x,y)$ の最大値は $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ とわかります。

この問題は考察のポイントが多いので、2点満点で採点しました。

■ 演習15-2について

$\frac{\partial g}{\partial y}=2(x^2+2y)\cdot 2-4x^2=8y$ より $\frac{\partial g}{\partial y}(\sqrt{2},-1)=-8\neq 0$ となることから、陰関数定理により、$(\sqrt{2},-1)$ の近くで $g(x,y)=0$ を満たす (x,y) は、$-1=\phi(\sqrt{2})$ を満たすある C^1-関数 $\phi(x)$ $(x\in I)$ を用いて、$(x,\phi(x))$ のように表わされることがわかります。$g(x,\phi(x))=0$ の両辺を x で微分すると、連鎖定理より $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\phi(x))+\frac{\partial g}{\partial y}(x,\phi(x))\phi'(x)=0$ が得られます。$\frac{\partial g}{\partial x}=4x^3-8x$, $\frac{\partial g}{\partial y}=8y$ なので $\phi'(x)=\dfrac{2x-x^3}{2\phi(x)}$ が得られます。