

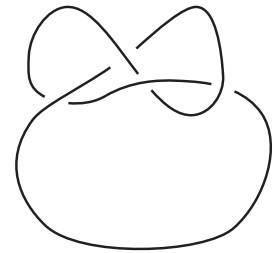
結び目のガウス整数を使った彩色数の計算

関 桃華 (表現論研究室)

§1. 序論

結び目と聞くと、リボンやネクタイ、靴紐などを想像するでしょう。数学では、右図のように1本の紐を好きなように結び目をつけて両端を繋いだものを結び目と言います。

結び目がほどけるかどうか、つまり交点を持たない自明な結び目に変形できるかどうかを調べるために、彩色数を用いることができます。彩色数はその結び目の”弧”を何色で塗り分けられるのかを表すものです。例えば、下の2つの図で与えられる結び目については、結び目の各弧を5色で塗り分けられ、4色以下では塗り分けられないので、彩色数はいずれも5となります。



2以上の整数 p に対して、 p 彩色可能な弧の塗り分け方の総数を階数と呼びます。この論文では結び目の階数を調べます。

ゼミでは『結び目のはなし』という本 [1] を読みました。彩色数を考えるとき、多くの研究では整数で考えることが多いですが、この本の最後の章ではガウス整数による結び目の彩色数が扱われており、8の字結びと星形の結び目の彩色数が計算されています。この論文では、それ以外の交点が6個以下の結び目について、ガウス整数による彩色数を計算します。整数による彩色と比較すると、結び目がほどけないか確認するのに手間がかかる場合がありましたが、ガウス整数を使うことで少しの計算で結び目がほどけないと確認できたものもあります。この論文ではさらにガウス整数の代わりに、 m を自然数として $a + b\sqrt{-m}$ (a, b は整数) の形をした数を用いた考察を行います。残念ながら交点数が6個以下ではガウス整数の場合と同じ結果となることがわかりました。

この論文では、§2 と §3 において [1] に沿って結び目の同値変形や彩色数の説明をします。§4 ではガウス整数による階数を計算し、§5 では i を $\sqrt{-m}$ に変えた時の考察を行います。

§2. 結び目の同値変形

結び目とは、三次元空間に円周を埋め込んだ像のことをいう。また**絡み目**とは、何本もの結び目が絡み合ったものをいう。

下図は交点数が6以下の結び目のリストで、最初の0, 3, 4, ... という数字が交点の数を表す。

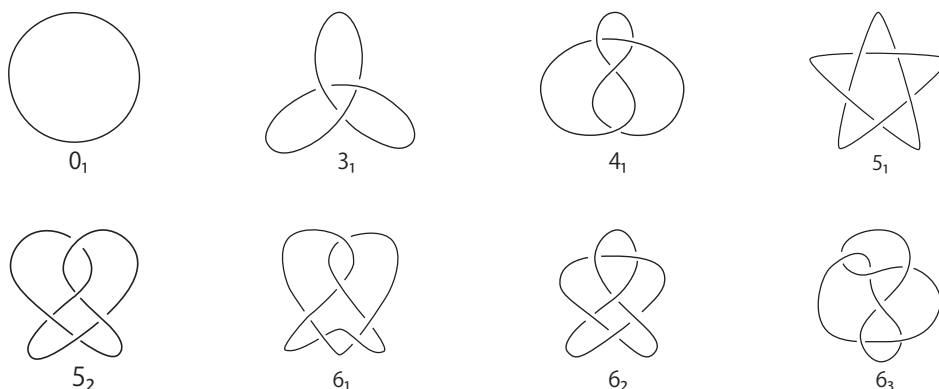


図 2.1 のように、空間内の結び目を平面上で表したものを**結び目の射影図**と呼ぶ。また、結び目の射影図において、交点の下側から交点の下側に到達するまでの部分を**弧**と呼ぶ。図 2.1 の射影図では、色分けされているそれぞれの部分が弧になる。

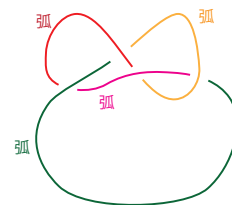


図 2.1

2つの結び目の一方を空間の中で連続的に変形すると他方が得られるとき、2つの結び目は**同値**であるという。つまり結び目の同値とは、連続変形を**同値変形**と考えたときの空間内の結び目全体の集合に対する同値関係のことである。結び目の同値変形で変わらない性質を結び目の**不変量**という。結び目の同値変形は、結び目の射影図の平面上の同値変形とライデマイスター移動によって言い換えられる。

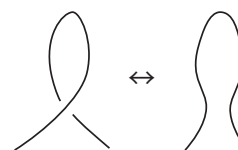
平面上の図形の同値変形

交点を持った閉じた曲線を平面上に乗せたまま伸縮自在に動かすことを平面上の同値変形という。

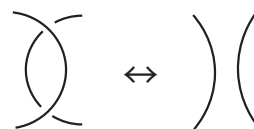
ライデマイスター移動

ライデマイスター移動とは平面上の図形としての同値変形ではないが、空間内の結び目としての同値変形であるような、以下3種類の変形のことをいう。

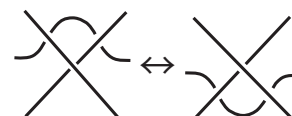
ライデマイスター移動 I は、結び目の射影図の一部に右図のように、ひねりを入れたり外したりする動作である。



ライデマイスター移動 II は結び目の射影図の右図のような2つの部分に対して、2交点を加えたり除いたりする動作である。



ライデマイスター移動 III は結び目の射影図の右図のような一部分を、ある交点の一方からもう一方にすべらせる動作である。



定理 2.1 空間内の2つの結び目が同値であるための必要十分条件は、結び目の射影図が平面上の同値変形とライデマイスター移動により移り合うことである。

§3. p を法とする階数の不変性について

この章では合同式を使った結び目の不変量を考えていく。整数の場合とガウス整数の場合のそれぞれについて、階数の定義を述べる。

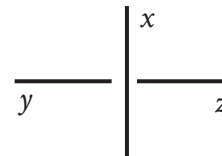
p を2以上の一つの整数とする。

①整数の場合

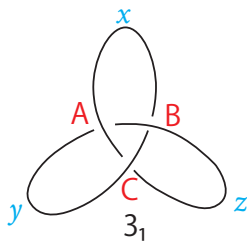
1つの弧に0から $p-1$ までの整数のうちの1つを対応させたものを、その弧の**重み**と呼び、全ての交点で交点条件を満たすような重みのことを**適切な重み**と呼ぶ。

ここで交点条件とは、右図のように重み x, y, z が与えられているとき、次の式を満たす合同式のことをいう。

(交点条件) $2x \equiv y + z \pmod{p}$



適切な重みの例



結び目 3_1 で $p = 3$ の場合

$x = 2, y = 0, z = 1$ とすると

A : $2 \times 2 \equiv 1 + 0 \pmod{3}$

B : $2 \times 1 \equiv 2 + 0 \pmod{3}$

C : $2 \times 0 \equiv 2 + 1 \pmod{3}$ となり、交点条件が満たされる。

結び目の射影図に対して適切な重みがいくつあるか、その個数のことをその射影図の p を法とした**階数**という。

定理 3.1 整数による p を法とした階数は結び目および絡み目の不変量となる。

証明

平面上の同値変形、ライデマイスター移動の2つの変形について、変形を行う前と後の射影図上の適切な重みの付け方が1対1に対応していれば良い。

平面上の同値変形によって変わらないこと

交点、弧、重みは同値変形によって1対1に対応するから、階数は変わらない。

ライデマイスター移動 I で変わらないこと

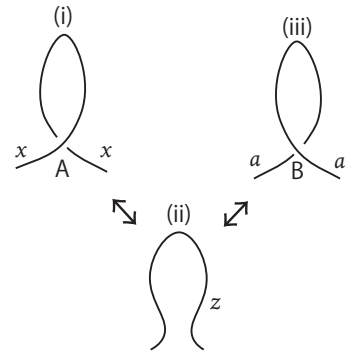
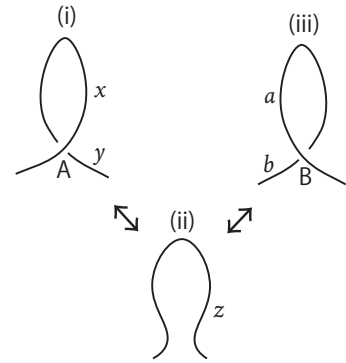
まず、右図の (i) のような部分が結び目の射影図にあったとする。右図のように重みをとる。

交点 A における交点条件は $2x \equiv x + y \pmod{p}$ であり、両辺から x を引いて $x \equiv y \pmod{p}$ 。

(iii) についても同様に、

交点 B における交点条件は $2a \equiv a + b \pmod{p}$ であり、両辺から a を引いて $a \equiv b \pmod{p}$ 。

つまり、(i),(iii) のような部分に交点条件を満たす重みをつけるには、同じ重みでなければならない。なので、交点条件を満たすように重みをつけようとする、右図のようになる。ここで、 $x = a = z$ と取ること適切な重みに 1 対 1 の対応がつくことになり、ライデマイスター移動 I による階数の不変性が示された。



ライデマイスター移動 II で変わらないこと

右図のように重みをとる。交点 A, B における交点条件はそれぞれ次のようになる。

A : $2x \equiv y + z \pmod{p} \cdots (1)$

B : $2x \equiv y + w \pmod{p} \cdots (2)$

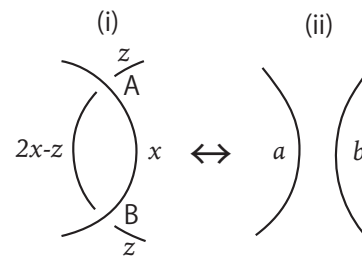
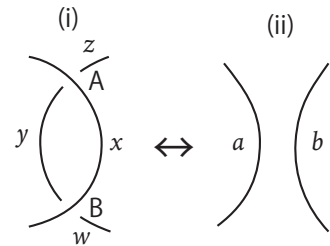
ここで (1)-(2) を計算すると $0 \equiv z - w \pmod{p} \cdots (3)$

つまり、 $z \equiv w \pmod{p}$ がわかる。

(1) の両辺から z を引くと $y \equiv 2x - z \pmod{p}$

となり、 y は x, z を決めれば自動的に決まる。

なので、交点条件を満たすように重みをつけようとする、右図のようになる。ここで、 $x = a, z = b$ と取ること適切な重みに 1 対 1 の対応がつくことになり、ライデマイスター移動 II による階数の不変性が示された。

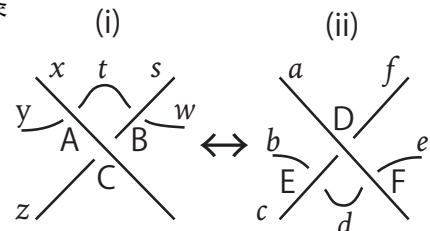


ライデマイスター移動 III で変わらないこと

右図のように重みをとる。(i) の交点 A, B, C における交点条件はそれぞれ次のようになる。

A : $2x \equiv y + t \pmod{p} \cdots (1)$

B : $2s \equiv t + w \pmod{p} \cdots (2)$



$$C : 2x \equiv s + z \pmod{p} \cdots (3)$$

$$(1) \text{ から } t \equiv 2x - y \pmod{p}$$

$$(3) \text{ から } s \equiv 2x - z \pmod{p}$$

$$\text{これらを (2) に代入して } 2(2x - z) \equiv 2x - y + w \pmod{p}$$

$$\text{よって } w \equiv 2x + y - 2z \pmod{p}$$

つまり、 s, t, u は x, y, z によって決まる。

(ii) の交点 D, E, F における交点条件はそれぞれ、

$$D : 2a \equiv c + f \pmod{p} \cdots (4)$$

$$E : 2c \equiv b + d \pmod{p} \cdots (5)$$

$$F : 2a \equiv d + e \pmod{p} \cdots (6)$$

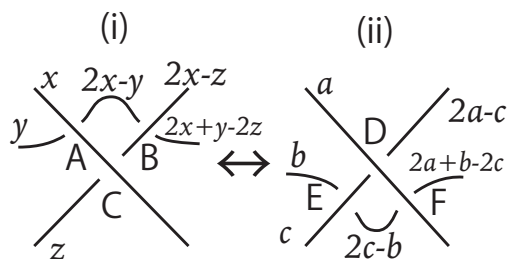
$$(5) \text{ から } d \equiv 2c - b \pmod{p}$$

$$\text{これを (6) に代入から } 2a \equiv 2c - b + e \pmod{p}$$

$$e \equiv 2a + b - 2c \pmod{p}$$

$$(4) \text{ から } f \equiv 2a - c \pmod{p}$$

つまり、 d, e, f は a, b, c によって決まる。



なので、交点条件を満たすように重みをつけようとする、右上図のようになる。ここで、 $x = a, y = b, z = c$ と取ること適切な重みに 1 対 1 の対応がつくことになり、ライデマイスター移動 III による階数の不変性が示された。

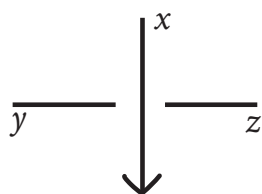
以上のことを合わせると、平面上の同値変形とライデマイスター移動によって階数が変わらないことが示され、階数が結び目の不変量となることがわかる。 (証明終)

②ガウス整数の場合

ガウス整数とは、実部と虚部が共に整数となっている数のことをいう。

・交点条件

まず、向きをついた結び目の射影図を考え、各弧には p を法としたガウス整数による重みが付いているものとする。



交点の周りでは左図のようになっているとすると、

$$\text{交点条件 : } z \equiv iy + (1 - i)x \pmod{p}$$

ここで x, y, z は、 p を法としたガウス整数で、上を通る弧は下向きに向きが付いていて、下を通る弧の向きは任意で良い。

各交点でこの交点条件を満たすような重みのことを、**ガウス整数による適切な重み**と呼ぶ。また、ガウス整数による適切な重みの

個数を、その射影図の**ガウス整数による p を法とする階数**と定める。

p を法としたガウス整数は、 $0, 1, \dots, p-1, i, 1+i, \dots, (p-1)+i, \dots, (p-1)i, 1+(p-1)i, \dots, (p-1) + (p-1)i$ の p^2 個あるので、交点のない結び目の射影図の、ガウス整数による p を法とした階数は p^2 である。

定理 3.1 の証明と同様に次の定理を証明することができる。

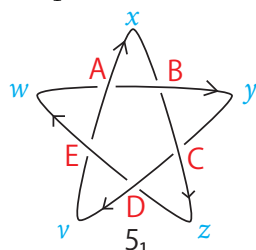
定理 3.2 ガウス整数による p を法とする階数は結び目および絡み目の不変量となる。

注意：階数は結び目の向きによらない [1, p.159]。

§4. ガウス整数を用いた階数の計算

この章では、前の章で紹介したガウス整数の交点条件を使い、実際に結び目の階数を計算する。

例： 5_1



交点条件は次の通りである。

$$\begin{aligned} A : w &\equiv iy + (1 - i)x \pmod{p} \\ B : x &\equiv iz + (1 - i)y \pmod{p} \\ C : y &\equiv iv + (1 - i)z \pmod{p} \\ D : z &\equiv iw + (1 - i)v \pmod{p} \\ E : v &\equiv ix + (1 - i)w \pmod{p} \end{aligned}$$

E に A を代入して $v \equiv ix + (1 - i)(iy + (1 - i)x) \equiv -ix + (1 + i)y \pmod{p} \cdots E'$

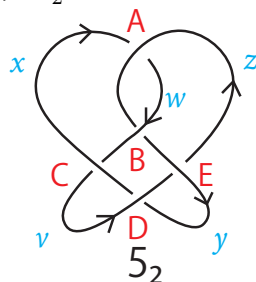
D に A, E' を代入して $z \equiv i(iy + (1 - i)x) + (1 - i)(-ix + (1 + i)y) \equiv y \pmod{p} \cdots D'$

x と y の関係を調べるために B に D' を代入すると $x \equiv iy + (1 - i)y \equiv y \pmod{p}$

これより、 $z \equiv x \pmod{p}$, $v \equiv x \pmod{p}$, $w \equiv x \pmod{p}$ 。

よって、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、x の決め方は p^2 通りあるので、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

例： 5_2



交点条件は次の通りである。

$$\begin{aligned} A : w &\equiv ix + (1 - i)z \pmod{p} \\ B : y &\equiv iz + (1 - i)w \pmod{p} \\ C : v &\equiv iw + (1 - i)x \pmod{p} \\ D : x &\equiv iy + (1 - i)v \pmod{p} \\ E : z &\equiv iv + (1 - i)y \pmod{p} \end{aligned}$$

A を B に代入して $y \equiv iz + (1 - i)(ix + (1 - i)z) \equiv (1 + i)x - iz \pmod{p} \cdots B'$

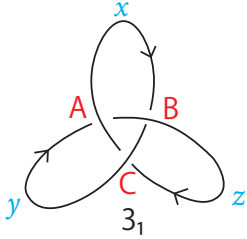
A を C に代入して $v \equiv i(ix + (1 - i)z) + (1 - i)x \equiv -ix + (1 + i)z \pmod{p} \cdots C'$

x と z の関係を調べるために D に B', C' を代入すると $x \equiv i((1 + i)x - iz) + (1 - i)(-ix + (1 + i)z) \equiv -2x + 3z \pmod{p}$ となり、両辺に $2x$ を加えると $3x \equiv 3z \pmod{p}$ となる。

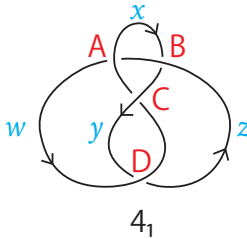
$p = 3$ のとき、 x, z それぞれ決め方は p^2 通りあるので、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。

$p \neq 3$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、x の決め方は p^2 通りあるので、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

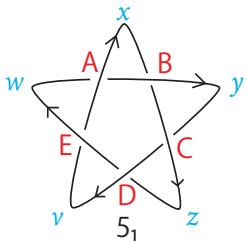
このようにして、 3_1 から 6_3 まで計算すると、以下のようになる。



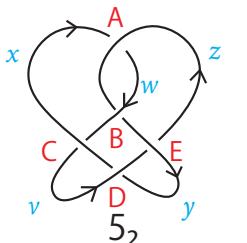
$x \equiv y \equiv z$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



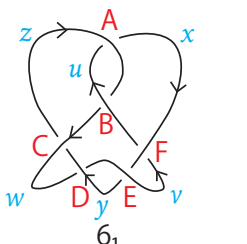
・ $p = 3$ のとき、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。
 ・ $p \neq 3$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



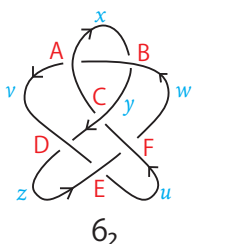
$x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



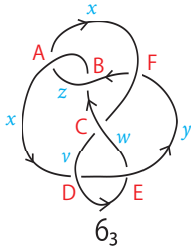
・ $p = 3$ のとき、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。
 ・ $p \neq 3$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



・ $p = 5$ のとき、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。
 ・ $p \neq 5$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



$x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。



- $p = 3$ のとき、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。
- $p \neq 3$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

ここまでの結果をまとめると、以下のようなになる。

ガウス整数を用いた階数の表

結び目 \ p	2	3	4	5	6	7	8	...
0_1	4	9	16	25	36	49	64	...
3_1	4	9	16	25	36	49	64	...
4_1	4	81	16	25	36	49	64	...
5_1	4	9	16	25	36	49	64	...
5_2	4	81	16	25	36	49	64	...
6_1	4	9	16	625	36	49	64	...
6_2	4	9	16	25	36	49	64	...
6_3	4	81	16	25	36	49	64	...

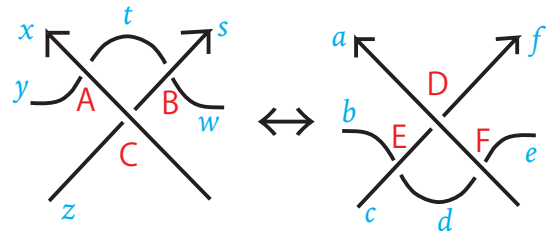
この表を見ると、 3_1 と 4_1 は $p = 3$ のときの階数が異なるので、同値ではないことがわかる。また、 3_1 と 5_1 と 6_2 、 4_1 と 5_2 と 6_3 はそれぞれ区別できないが、[1, p.134] の表によると、整数彩色だと前者は $p = 3$ と $p = 5$ の両方を組み合わせると同値ではない。また、後者は $p = 5$ と $p = 7$ の両方を組み合わせると同値ではないことがわかる。また、 $p = 3$ で 81、 $p = 5$ で 625 という風に p^4 になっていて、それ以外のところは p^2 になっている。

§5. $i = \sqrt{-m}$ として重みを計算

m を正の整数とし、 i を $\sqrt{-m}$ に置き換えて考察してみる。
 そうすると交点条件は、 $z \equiv \sqrt{-m}y + (1 - \sqrt{-m})x \pmod{p}$ に置き換わる。

ライデマイスター移動 III のもとで、交点条件が保存されるか否かを確認する。
 右図の状況のもとで、左側の図に基づく交点条件は次のようになる。

- A : $y \equiv \sqrt{-m}t + (1 - \sqrt{-m})x \pmod{p}$
- B : $t \equiv \sqrt{-m}w + (1 - \sqrt{-m})s \pmod{p}$
- C : $z \equiv \sqrt{-m}s + (1 - \sqrt{-m})x \pmod{p}$



$$\begin{aligned} \text{C の両辺に } \sqrt{-m} \text{ をかける} &: ms \equiv (m + \sqrt{-m})x - \sqrt{-m}z \pmod{p} \cdots \text{C}' \\ \text{A の両辺に } \sqrt{-m} \text{ をかける} &: mt \equiv (m + \sqrt{-m})x - \sqrt{-m}y \pmod{p} \cdots \text{A}' \\ \text{B} \times m \text{ に A}', \text{C}' \text{ を代入} &: mw \equiv (m - \sqrt{-m})x - y + (1 - \sqrt{-m}y) \pmod{p} \cdots \text{B}' \end{aligned}$$

一方、右側の図に基づく交点条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{D} &: c \equiv \sqrt{-m}f + (1 - \sqrt{-m})a \pmod{p} \\ \text{E} &: b \equiv \sqrt{-m}d + (1 - \sqrt{-m})c \pmod{p} \\ \text{F} &: d \equiv \sqrt{-m}e + (1 - \sqrt{-m})a \pmod{p} \end{aligned}$$

$$\text{D の両辺に } \sqrt{-m} \text{ をかける} : mf \equiv (m + \sqrt{-m})a - \sqrt{-m}c \pmod{p} \cdots \text{D}'$$

$$\text{E の両辺に } \sqrt{-m} \text{ をかける} : md \equiv -\sqrt{-m}b + (m + \sqrt{-m})c \pmod{p} \cdots \text{E}'$$

$$\text{F} \times m \text{ に E}' \text{ を代入} : me \equiv (m + \sqrt{-m})a - b + (1 - \sqrt{-m})c \pmod{p} \cdots \text{F}'$$

C' と D', B' と F' を比べると、 $x \equiv a, y \equiv b, z \equiv c, w \equiv e, s \equiv f$ となり、 $i = \sqrt{-m}$ と置き換えても交点条件が成り立つことが証明された。また、ライデマイスター移動 I, II においても同じように計算すると、 $i = \sqrt{-m}$ と置き換えても交点条件が成り立つことが証明される。

$\sqrt{-m}$ を使って、 3_1 から 6_3 までの適切な重みの数を計算すると以下のようなになる。

$3_1 \cdot p = \sqrt{-m} - m\sqrt{-m} + m$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 1$ 。ただし、 p は 2 以上の整数なので $p = 1$ は存在しない。

• $p \neq \sqrt{-m} - m\sqrt{-m} + m$ のとき、 $x \equiv y \equiv z$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

$4_1 \cdot p = \sqrt{-m} + 3m - m\sqrt{-m} + m$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 3$ 。よって、3 を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。

• $p \neq \sqrt{-m} + 3m - m\sqrt{-m} + m$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

$5_1 \cdot p = 1 - \sqrt{-m} - m + m\sqrt{-m} + m^2$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 1$ 。ただし、 p は 2 以上の整数なので $p = 1$ は存在しない。

• $p \neq 1 - \sqrt{-m} - m + m\sqrt{-m} + m^2$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

$5_2 \cdot p = \sqrt{-m} + 3m - m\sqrt{-m}$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 3$ 。よって、3 を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。

• $p \neq \sqrt{-m} + 3m - m\sqrt{-m}$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

6₁ • $p = 2\sqrt{-m} + 5m - 2m\sqrt{-m}$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 5$ 。よって、5 を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。

• $p \neq 2\sqrt{-m} + 5m - 2m\sqrt{-m}$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

6₂ • $p = -1 + 3\sqrt{-m} + 3m + 3m\sqrt{-m} - m^2$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 1$ 。ただし、 p は 2 以上の整数なので $p = 1$ は存在しない。

• $p \neq -1 + 3\sqrt{-m} + 3m + 3m\sqrt{-m} - m^2$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

6₃ • $p = -1 + 3\sqrt{-m} + 5m - 3m\sqrt{-m} - m^2$ のとき、 $m = 1$ でしか成り立たないので $p = 3$ 。よって、3 を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^4 個である。

• $p \neq -1 + 3\sqrt{-m} + 5m - 3m\sqrt{-m} - m^2$ のとき、 $x \equiv y \equiv z \equiv v \equiv w \equiv u \pmod{p}$ となり、 p を法としたガウス整数による適切な重みの数は p^2 個である。

このように、3₁ から 6₃ まで調べたところ、 $m = 1$ でないと p が 1 以上の整数にならず、結果として i の代わりに $\sqrt{-m}$ を使っても新しい不変量は出てこないことがわかった。

参考文献

[1] 村上斉『結び目のはなし [新装版]』, 日本評論社, 2022 年.