

結び目を組み紐へと紐解く

山本 柊二 (表現論研究室)

February, 16, 2023

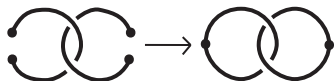
Introduction

この論文の目標 \implies 特殊な結び目—あわじ結び目, かごめ十角結び目, かごめ十五角結び目—を組み紐で表す.

- ▶ **結び目** = 一本の紐の両端を繋いだ輪.



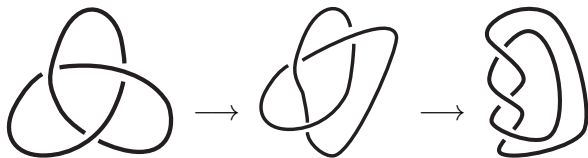
- ▶ **絡み目** = 何本もの結び目が絡み合ったもの.



- ▶ **組み紐** = 水平な二本の棒に紐の両端をそれぞれくっつけて, その n 本の紐からなる集合. ただし一本の紐を辿っていくと常に紐は下方向に向かっているものとする.



- 例えば, 下図の左端の結び目は, 変形していくことで, 右端のような (閉じた) 組み紐で表すことができる.

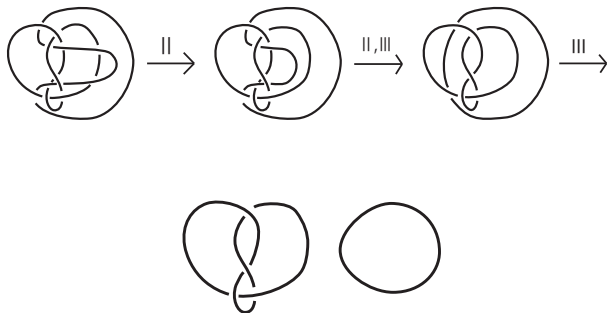


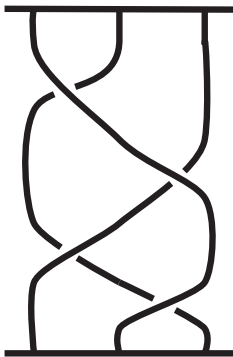
⇒ 一般にはアレキサンダーによりどんな絡み目も組み紐で表すことができることが知られている. さらにそのアルゴリズムも知られている. 絡み目を組み紐で表すためのアルゴリズムを説明し, それを用いて問題を解く.

Theorem 1 (ライデマイスター)

2つの絡み目が同値であるための必要十分条件は、それらの射影図が有限回のライデマイスター移動と平面の同位変形によりうつりあうことである。

下の図はライデマイスター移動を施す例である。



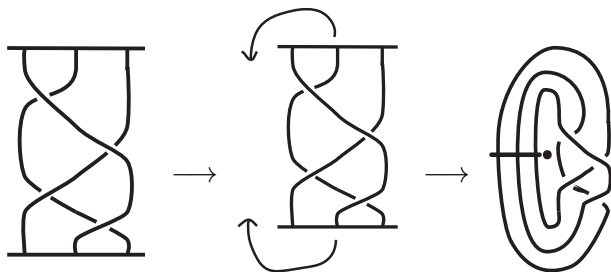


$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}$$

結び目を組み紐で表す

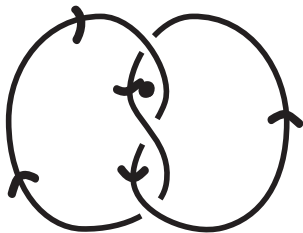
組み紐は結び目とどのような関係があるのだろうか？

組み紐の下の棒を引っ張ってくるっと回して上の棒にくっつけると結び目になる. このような結び目を**閉じた組み紐**という.



閉じた組み紐

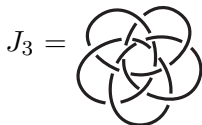
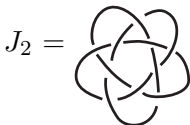
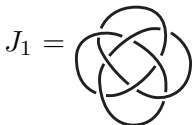
⇒ 軸を一点決めて, 結び目が軸の周りを時計回りに回るように出発し後戻りせずに回るとき, 結び目の**閉じた組み紐表示**という.



閉じた組み紐表示ではない

問題

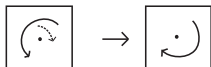
特殊な結び目の例, J_1 =あわじ結び目, J_2 =かごめ十角結び目, J_3 =かごめ十五角結び目をそれぞれ組み紐で表せ.



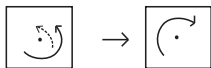
解;

次の方針で解く.

1. 結び目に向きをつけて軸を一点決める.
2. 結び目が軸に対して時計回りに回り続けて一周するように, 紐が軸に対して反対方向に回り始めた場合, その部分の紐を軸の反対側に時計回りに戻るように持っていく.



→

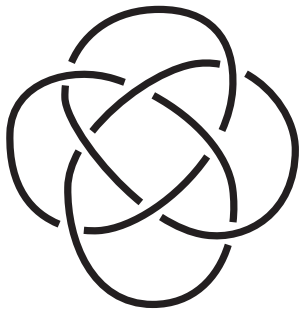


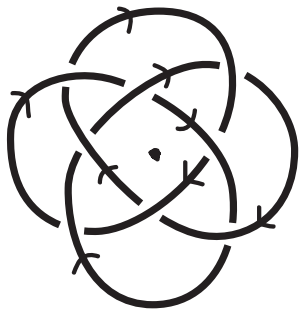
→

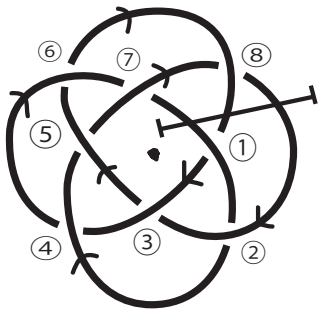


3. 結び目全体が軸の周りを時計回りに回り続けて結び目を一周するまで, 2 の操作を繰り返し行う.
4. 線分のところで結び目を切り開き, 上から n 本の紐を辿っていき番号の順に交点を作っていくと組み紐で表される.

$J_1 =$









$$(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^4$$

同様に;

$J_2 =$



$$(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^5$$

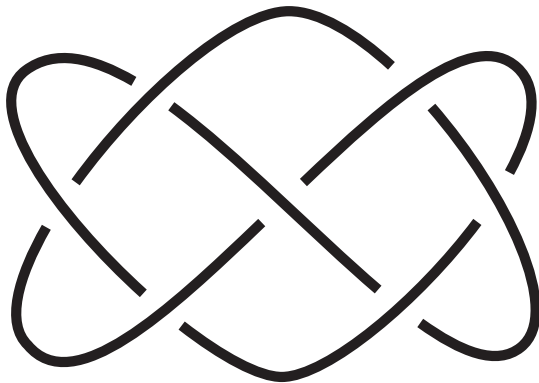
$J_3 =$

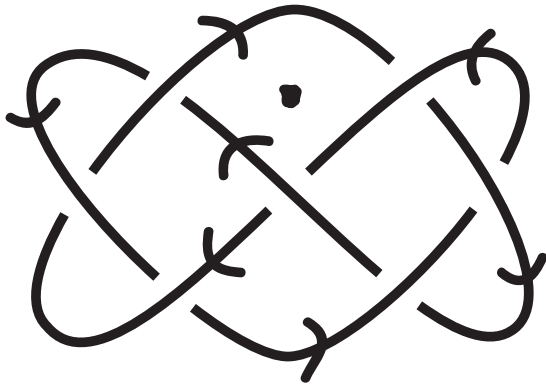


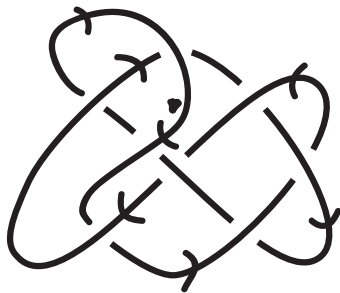
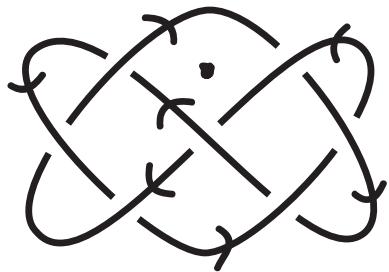
$$(\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1})^5$$

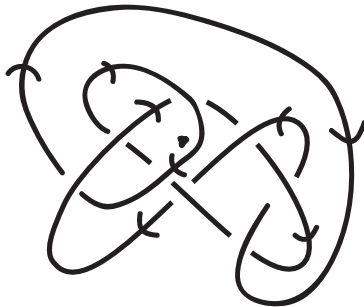
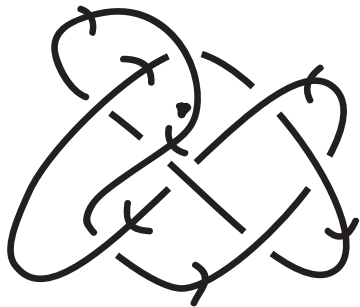
問題 2

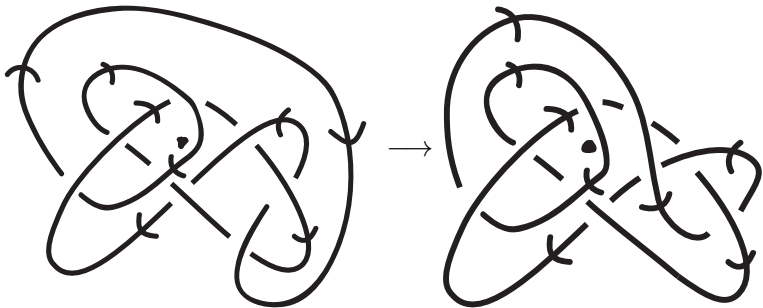
次の結び目を閉じた組み紐表示で描け

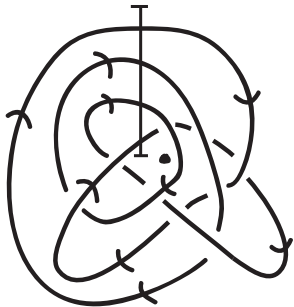
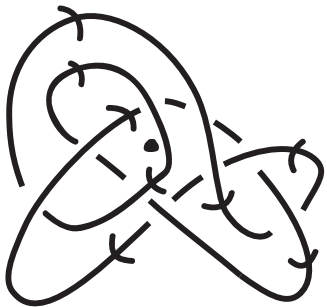


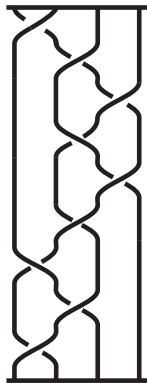












$$\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$$

Braid is beautiful

人生とは組み紐のようなものである。約 70 億人もの人生という名の紐が絡み合い、私たちはもうすでにこの場所で交差している。遠回りしたり真っ直ぐに進むのもそれぞれである。だが最後は必ずどの紐もゴールにたどり着くであろう。 by shuji yamamoto