

サッカーボールの模様の数学的分類

藤川 敢吉 (表現論研究室)

§1. Introduction

1-1 はじめに

球面の模様に興味を持ち、考えていく中で特にサッカーボールの模様に興味を持った。いわゆるサッカーボールの模様と言われて想像するのは白の六角形と黒の六角形のパーツが組み合わさってできた幾何学模様であるが、実際のところ、4年に1度開催されるW杯で使われているボールにはそれだけでなく多種多様な模様がある。

球面の模様を生成する対称性は Conway 記号を用いて表記、分類することができることが知られている [1, 2]。Conway 記号はそれだけでなく生成元と関係式を一定の規則に従って与えることで、模様の対称性全体のなす群を表すこともできる。この論文では、W杯で実際に使われた様々なサッカーボールの模様を Conway 記号を用いて数学的に分類し、その模様の対称群の生成元と関係式を図で表現する。

§2. 球面の繰り返し模様の分類

2-1 対称性

日常には様々な模様が存在する。それらは一見、複雑であるが対称性を見つけることで綺麗に整理できる。

対称性には次の5つが存在する。

① 恒等対称

そのままを移り合う対称性のことをいう。常に存在する。

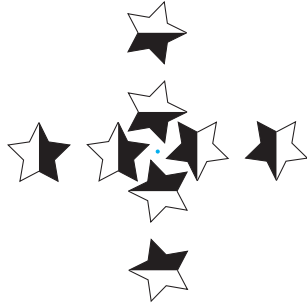
② 平行移動

直線の移動で移り合う対称性のことをいう。



③ 回転

点を中心に回転で移り合う対称性のことをいう。 $\frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 2$) の回転により移り合う回転の中心となる点を「 $(n$ 位) 旋回点」という。



④ 鏡映

左右対称のような、線を軸に鏡で移り合う対称性のことをいう。球面の場合には球の中心を通る平面に関する対称性のことをいう。鏡映の軸となる線を「鏡映線」、 n 本 ($n \geq 2$) の鏡映線が交わる点を「(n 位) 万華鏡点」という。ただし、旋回点でも万華鏡点でもある場合は、旋回点ではなく万華鏡点であると考ええる。



⑤ すべり鏡映

平行移動の後、鏡映を行なって移り合う対称性のことをいう。球面の場合には、球の中心で直交する直線を平面に対して直線を軸とする回転を行なったのち、平面に関する鏡映を行なって移り合う対称性のことをいう。ただし、移動前後の点は鏡映線を超えて移り合わないとする。



この論文では以上の対称性に注目してサッカーボールの模様を数学的に分類していく。

2-2 Conway 記号

模様対称性を表記するために Conway 記号という記号を用いる。

球面の模様には平行移動は存在しないため、2-1 の対称性のうち、回転、鏡映、すべり鏡映に対して Conway 記号を以下のように定める。

定義 2.1 (Conway 記号)

① 回転

n 位旋回点による回転を n と記す。

② 鏡映

万華鏡点をもたない鏡映線による鏡映は単に * と記し、 n 位万華鏡点による鏡映は $*n$ と記す。

③ すべり鏡映

すべり鏡映を \times と記す。

異なる記号を合わせて表記する際は、旋回点の位数、*、 \times 、万華鏡点の位数の順番で並べる。具体的には、旋回点の位数が大きいものから順に $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ 、万華鏡点の位数が大きいものから順に $s_1, s_2, s_3, \dots, s_l$ であるとき、 k 個の旋回点と l 個の万華鏡点を併せもつ模様は $r_1 r_2 r_3 \dots r_k * s_1 s_2 s_3 \dots s_l$ と表記する。

例えば、

すべり鏡映のみをもつ模様は \times ,

異なる 2 つの 3 位万華鏡点をもつ模様は $*33$,

3 位旋回点を 1 つと 2 位万華鏡点を 1 つもつ模様は $3*2$

と表記できる。

2-3 球面の繰り返し模様のリスト

球面の繰り返し模様はすべて Conway 記号で表すことができる。この際、同じ対称性をもつ球面の繰り返し模様は同一視する。このとき、次が成り立つ。

定理 2.2 (球面の繰り返し模様のリスト)

球面の繰り返し模様は以下の 14 種のいずれかに分類される。

$532, \quad 432, \quad 332, \quad 22n \ (n \geq 1), \quad nn \ (n \geq 1),$

$3*2, \quad 2*n \ (n \geq 1), \quad n* \ (n \geq 1), \quad n \times \ (n \geq 1),$

$*532, \quad *432, \quad *332, \quad *22n \ (n \geq 2), \quad *nn \ (n \geq 2)$

この定理の証明は [1] または [2] を参照。

§3. 対称移動の図示

3-1 Conway 記号への生成元の付与と関係式

次のような規則に則って模様の Conway 記号にギリシャ文字と大文字のラテン文字を使って表される生成元を付与し、その生成元に関する関係式を導入する。

ここで、模様の Conway 記号は $r_1 r_2 \dots r_k * s_1 s_2 \dots s_l$ または、 $r_1 r_2 \dots r_k \times$ であるとする。

① 旋回

模様 Conway 記号において回転から定まる部分が $r_1 r_2 \cdots r_k$ であるとき、生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ を付与して、 $\alpha_1 r_1^{\alpha_2} r_2 \cdots \alpha_k r_k$ とする。このとき、関係式

$$1 = \alpha_1^{r_1} = \alpha_2^{r_2} = \cdots = \alpha_k^{r_k}$$

を導入する。

② 鏡映

模様 Conway 記号において鏡映から定まる部分が $*s_1 s_2 \cdots s_l$ であるとき、生成元 β, P, Q, \dots, T を付与して、 $\beta * P s_1^Q s_2^R \cdots s_l^T$ を作る。このとき、生成元の間に関係式

$$1 = P^2 = (PQ)^{s_1} = Q^2 = (QR)^{s_2} = R^2 = \cdots = S^2 = (ST)^{s_l} = T^2,$$

$$\beta^{-1} P \beta = T$$

を導入する。

③ すべり鏡映

模様 Conway 記号が \times を含むとき、生成元 γ, Z を付与して、 $\gamma \times Z$ とする。このとき、関係式 $\gamma = Z^2$ を導入する。

④ ギリシャ文字の規則

模様各 Conway 記号における $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta, \gamma$ 等のギリシャ文字の全ての生成元に対して常に関係式

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \beta \gamma = 1$$

を導入する。

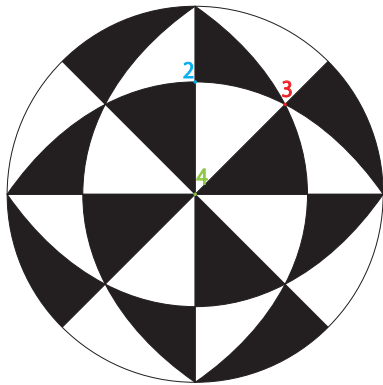
上の規則に基づいて、模様 Conway 記号に生成元を付与し、関係式を導入する。例えば、Conway 記号が $r_1 r_2 \cdots r_k * s_1 s_2 \cdots s_l$ であるような模様に対して、その Conway 記号に生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta, P, Q, \dots, T$ を与えて、 $\alpha_1 r_1^{\alpha_2} r_2^{\alpha_3} \cdots \alpha_k r_k^{\beta} * P s_1^Q s_2^R \cdots s_l^T$ を考える。このとき、生成元の間に関係式

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \beta &= 1 = \alpha_1^{r_1} = \alpha_2^{r_2} = \cdots = \alpha_k^{r_k} \\ &= P^2 = (PQ)^{s_1} = Q^2 = (QR)^{s_2} = R^2 = \cdots = S^2 = (ST)^{s_l} = T^2, \\ \beta^{-1} P \beta &= T \end{aligned}$$

を導入する。以降、生成元と関係式を合わせて

$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta, P, Q, \dots, T | \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta = 1 = \alpha_1^{r_1} = \alpha_2^{r_2} = \dots = \alpha_k^{r_k}$
 $= P^2 = (PQ)^{s_1} = Q^2 = (QR)^{s_2} = R^2 = \dots = S^2 = (ST)^{s_l} = T^2, \beta^{-1} P \beta = T \rangle$
 のように記す。これは球面の模様を保存する対称性全体のなす群を表している [2]。実際、幾何学的には関係式内の大文字のラテン文字は鏡映を、ギリシャ文字は回転を表している。このとき、 PQ, QR, \dots 等の大文字のラテン文字の積は2つの鏡映の積として回転を表す。

例 3.3 球面上のモノクロの繰り返し模様



この模様の Conway 記号は **432** である。これに、生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を付与すると $\alpha_1^4 \alpha_2^3 \alpha_3^2$ となる。このとき、生成元と関係式は

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1 = \alpha_1^4 = \alpha_2^3 = \alpha_3^2 \rangle$$

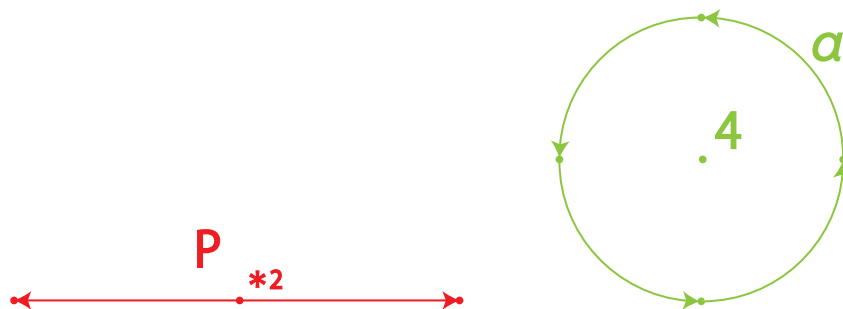
であり、これは、この模様の対称群を表す。

3-1 関係式の図による表現

前節で導入した関係式 $P^2 = 1$ と $\alpha^r = 1$ は模様の上に次のように表せる。

鏡映における関係式 $P^2 = 1$ は、 P が双方向の移動であるため、左下図のように双方向の矢印で表す。また、これは P の移動を2回行えば元の点に戻ることを意味している。

回転における関係式 $\alpha^r = 1$ は α は片方向の回転移動であるため片方向の矢印で表す。また、これは α の移動を r 回行えば元の点に戻ることを意味している。例えるならば、 $\alpha^4 = 1$ は右下図のように表せる。



§4. サッカーボールの模様の数学的分類

この節では、2018年までに開催されたすべてのW杯で実際に扱われたサッカーボールの模様を数学的に分類する。この際、色、ロゴ、縫い目などは考慮せず、あくまでも模様の対称性に注目する。

結果は次の表の通りである。

年代	開催国	ボールの名称	Conway 記号
1930	ウルグアイ	-	3*2
1934	イタリア	-	3*2
1938	フランス	-	3*2
1950	ブラジル	-	3*2
1954	スイス	-	3*2
1958	スウェーデン	-	3*2
1962	チリ	-	3*2
1966	イングランド	-	3*2
1970	メキシコ	テルスター	*532
1974	西ドイツ	テルスター	*532
1978	アルゼンチン	タンゴ	*532
1982	スペイン	タンゴ・エスパーニャ	*532
1986	メキシコ	アステカ	*532
1990	イタリア	エトルスコ・ユニコ	532
1994	アメリカ合衆国	クエストラ	532
1998	フランス	トリコロール	532
2002	韓国、日本	フィーバーノヴァ	332
2006	ドイツ	チームガイスト	3*2
2010	南アフリカ共和国	ジャブラニ	*332
2014	ブラジル	ブラズーカ	432
2018	ロシア	テルスター 18	432

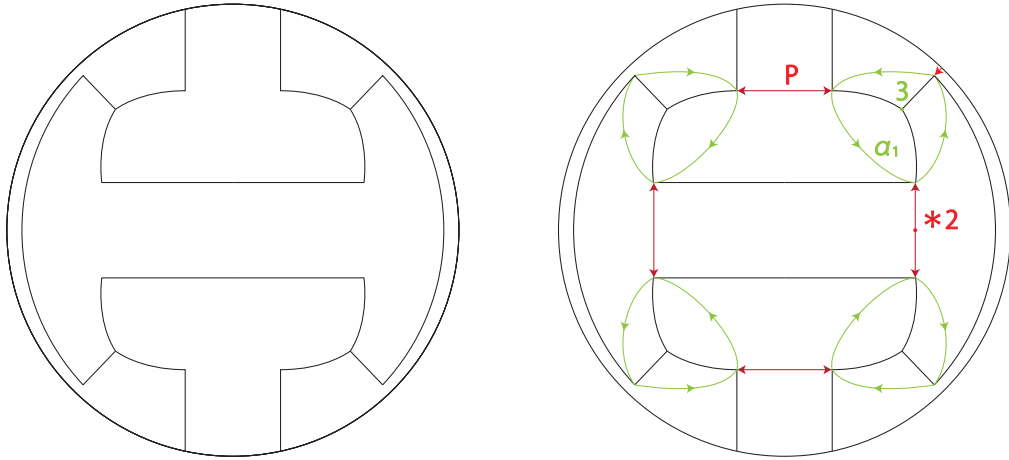
実際のサッカーボールの画像は [3] を参照。

以下、同様の模様をもつサッカーボールごとに詳しく調べていく。

左側の図は模様の対称性に注目して簡略化した図であり、右側の図はそれに対応した模様の対称群の生成元と関係式を図で表現したものである。

4-1-1 1930年～1966年, 2006年

例 4.4 1930年



Conway 記号

$3*2$

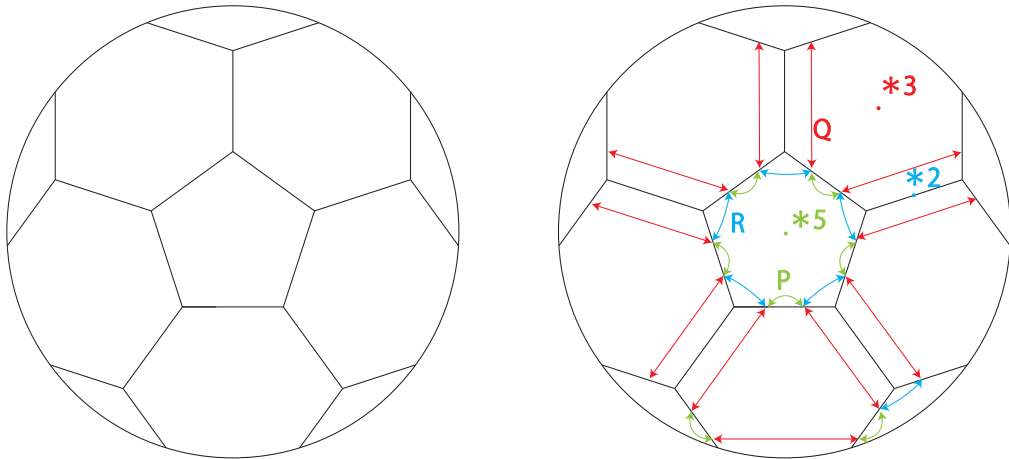
生成元を付与した Conway 記号 $\alpha_1 3^\beta * P^2 Q (= \alpha_1 3 * P^2)$

模様対称群の表示

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_1, \beta, P, Q | \alpha_1 \beta = 1 = \alpha_1^3 = P^2 = (PQ)^2 = Q^2, \beta^{-1} P \beta = Q \rangle \\ & = \langle \alpha_1, P | 1 = \alpha_1^3 = P^2 = (P \alpha_1 P \alpha_1^{-1})^2 \rangle \end{aligned}$$

4-1-2 1970年～1986年

例 4.5 1970年



Conway 記号

$*532$

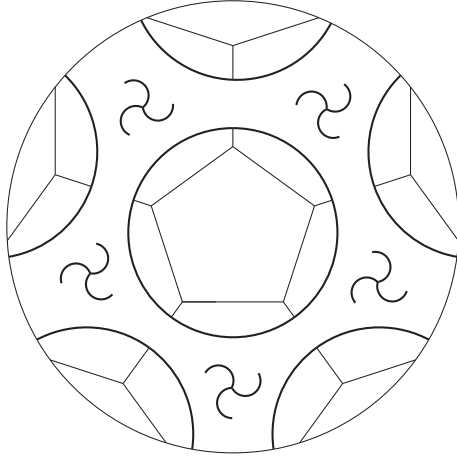
生成元を付与した Conway 記号 $\beta * P^5 Q^3 R^2 S (= * P^5 Q^3 R^2)$

模様対称群の表示

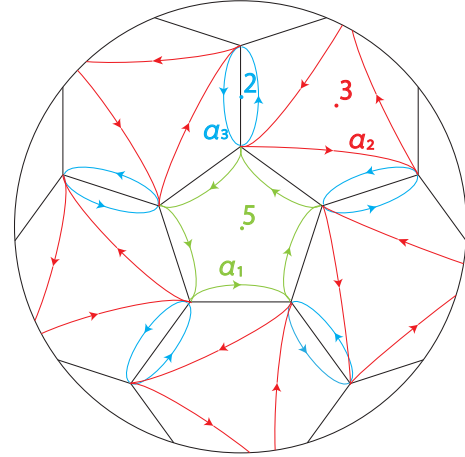
$$\begin{aligned} & \langle \beta, P, Q, R, S | \beta = 1 = P^2 = (PQ)^5 = Q^2 = (QR)^3 = R^2 = (RS)^2 = S^2, \\ & \beta^{-1} P \beta = S \rangle \\ & = \langle P, Q, R | 1 = P^2 = (PQ)^5 = Q^2 = (QR)^3 = R^2 = (RP)^2 \rangle \end{aligned}$$

4-1-3 1990年～1998年

例 4.6 1990年



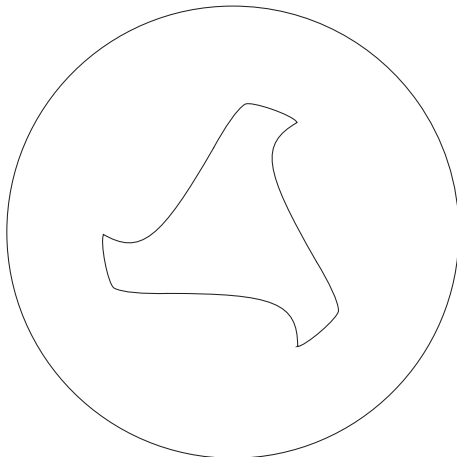
Conway 記号
生成元を付与した Conway 記号
模様対称群の表示



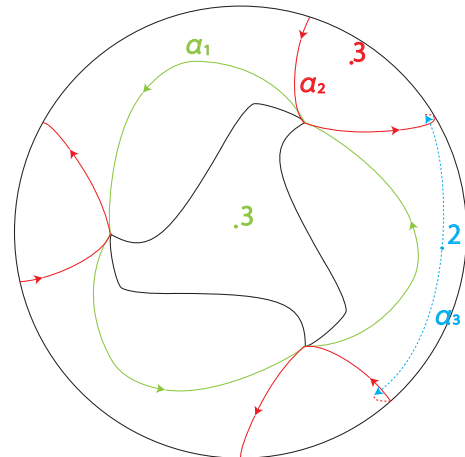
532
 $\alpha_1 5 \alpha_2 3 \alpha_3 2$
 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1 = \alpha_1^5 = \alpha_2^3 = \alpha_3^2 \rangle$

4-1-4 2002年

例 4.7 2002年



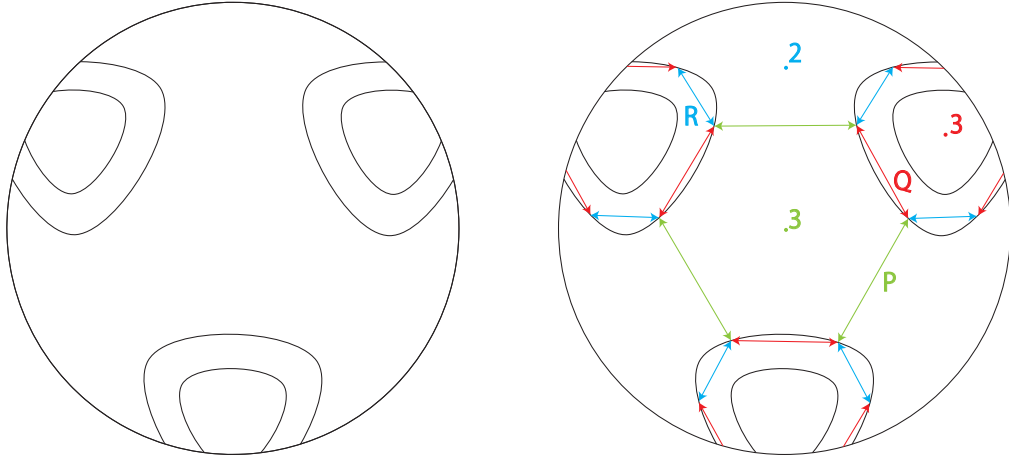
Conway 記号
生成元を付与した Conway 記号
模様対称群の表示



332
 $\alpha_1 3 \alpha_2 3 \alpha_3 2$
 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1 = \alpha_1^3 = \alpha_2^3 = \alpha_3^2 \rangle$

4-1-5 2010 年

例 4.8 2010 年



Conway 記号

*332

生成元を付与した Conway 記号

$\beta * P_3 Q_3 R_2 S (= * P_3 Q_3 R_2)$

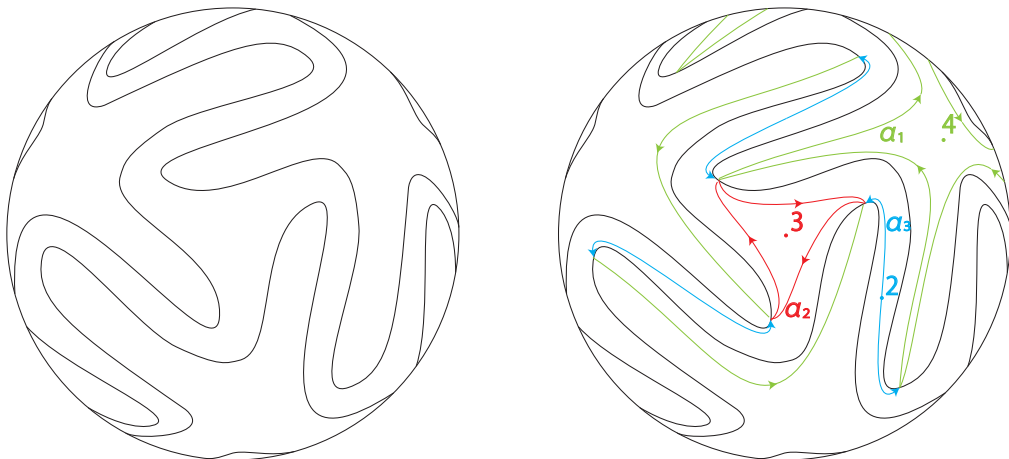
模様対称群の表示

$$\langle \beta, P, Q, R, S \mid \beta = 1 = P^2 = (PQ)^3 = Q^2 = (QR)^3 = R^2 = (RS)^2 = S^2, \beta^{-1}P\beta = S \rangle$$

$$= \langle P, Q, R \mid 1 = P^2 = (PQ)^3 = Q^2 = (QR)^3 = R^2 = (RP)^2 \rangle$$

4-1-6 2014 年, 2018 年

例 4.9 2014 年



Conway 記号

432

生成元を付与した Conway 記号

$\alpha_1 4^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 2$

模様対称群の表示

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1 = \alpha_1^4 = \alpha_2^3 = \alpha_3^2 \rangle$$

4-2 おわりに

W杯のサッカーボールの模様は $3*2$, *532, **532**, **332**, *332, **432** の6つに分類されることがわかった。時代毎に並べてみると、1966年までは $3*2$ 、1970年～1986年は典型的なサッカーボールとしてイメージされる *532、1990年～1998年は **532** といったように同様の模様が一定期間続くことが分かる。一方、2002年以降は多様化が見られる。

参考文献

- [1] 笹田健一著, 『対称性と数学 繰り返し模様に潜む幾何と代数』, 技術評論社, 2016.
- [2] J. H. Conway, H. Burgiel, C. Goodman-Strauss 共著, 『The Symmetries of Things』, A K Peters, 2008.
- [3] <https://www.worldcupballs.info>.