グラフと表現

丸田悠人　　(表現論研究室)

私は卒業研究で, 草場公邦著「行列特論」第 2 章を読み, グラフの表現論について学んだ. この論文はそのまとめである.

有向グラフ Γ が 1 つ与えられたとき, 各頂点に有限次元線形空間を, 各辺に線形写像を対応させる. この対応を Γ の表現という. 次の図は最も簡単な有向グラフとその表現を表している. (V, W は頂点に対応させた線形空間であり, f は V から W への線形写像である.)

$$\mathrm{A}_2 : \quad \underset{\mathrm{V}}{\circ} \xrightarrow{\ f\ } \underset{\mathrm{W}}{\circ}$$

有向グラフ Γ が 1 つ与えられたとき, Γ の表現を (本質的に同じものは同一視して) すべて求めるという問題を考える. 例えば, 上図のグラフ A_2 の場合, V と W の基底を定めると, 線形写像 f を行列で表示することができる. 行列に基本変形を施すと階段型にすることが出来るから, A_2 の表現は f の行列表示の階数により決定される. 一般の有向グラフの場合には（各辺に対応づけられた）複数の線形写像に対する「同時標準形」を求める問題になる. この問題は 1972 年にガブリエルによって解決されており, 表現をすべて求めることができるグラフと, そうでないグラフが存在する. ガブリエルは表現をすべて求めることができるグラフは, $A_n\,(n \geqq 1), D_n\,(n \geqq 4), E_6, E_7, E_8$ 型と呼ばれる特別な (有向) グラフに限ることを示した (グラフの形は §1 を参照). さらにガブリエルはこれらの各グラフに対して, 直既約表現 (それ以上直和に分解することができない, 最も基本的な表現) を求めるための具体的な構成方法を与えている.

§1 では上記の書に則して, ガブリエルの定理を説明し, §2 では, ガブリエルの定理の一部である, 正ルートと直既約表現との対応の仕方を述べる. 最後にその方法を D_4 グラフに適用し, 1 つの正ルートから D_4 の直既約表現を求める.

§1. ガブリエルの定理

この章では, 必要な定義などを先にまとめ, 最後に「ガブリエルの定理」を記す.

定義 1 集合 V, E と写像 $f : E \to V \times V$ の 3 つの組 (f, V, E) のことを**有向グラフ**という. また V の元を **頂点** , E の元を **辺** という.
有向グラフの形状を Γ , 方向付けを Λ で表すと, 有向グラフは (Γ, Λ) によって与えることもできる.

簡単のため次の記号を導入する.

$$\begin{aligned} v(\Gamma) &= \Gamma\text{の頂点の集合} \\ e(\Gamma) &= \Gamma\text{の辺の集合} \\ \alpha(l) &= \text{辺}\, l\, \text{の始点} \\ \beta(l) &= \text{辺}\, l\, \text{の終点} \\ \Gamma^{\alpha} &= \text{端点が}\, \alpha\, \text{である辺の集合} \end{aligned}$$

ここで, 有向グラフ (Γ, Λ) に対して表現を定義しよう.

定義 2 (V, f) が (Γ, Λ) の **表現**であるとは, (Γ, Λ) の各頂点 α に $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V_α を配置し, 各辺 l の矢印の向きに $\mathbb{C}$ 線形写像 f_l を与える対応のことである. f を省略して単に V を表現とよぶこともある.

定義 3 (Γ, Λ) の表現 (V, f) と (V', f') が**同型**であるとは, 各頂点 α に対して V_α から V'_α への $\mathbb{C}$ 線形な同型写像 P_α が存在して次の可換性を満たすことをいう.
Γ の各辺 l に対して,

$$f_l = P^{-1}_{\beta(l)} \cdot f'_l \cdot P_{\alpha(l)} \ .$$

定義 4 表現 $(V, f), (W, g)$ の**直和**とは, 次のように与えられる表現 (U, h) のことをいう.

$$U_\alpha = V_\alpha \oplus W_\alpha \quad (\alpha \in v(\Gamma)), \qquad h_l = f_l \oplus g_l \quad (l \in e(\Gamma))$$

ただし h_l を

$$h_l((v, w)) = (f_l(v), g_l(v)) \qquad (\,(v, w) = v \oplus w \in V_{\alpha(l)} \oplus W_{\alpha(l)}\,)$$

によって定める. このとき

$$(U, h) = (V, f) \oplus (W, g)$$

とかく.

定義 5 (Γ, Λ) の表現 (V, f) が **直既約** であるとは, $(V, f) = (V_1, f_1) \oplus (V_2, f_2)$ なる真の直和分解ができないことをいう. これはこのような直和表示があれば, $(V, f) = (V_1, f_1)$ あるいは $(V, f) = (V_2, f_2)$ なることと同値である.

次の定理から, 直既約表現によって表現の同型類全体が生成されることがわかる.

定理（Krull-Remak-Schmidt）
(Γ, Λ) の任意の表現 (V, f) は同型を除いて一意的に直既約表現の直和として表される.

表現の中で最も単純なものは, 原子表現と呼ばれている.

定義 6 α_i を Γ の 1 つの頂点とする. L_{α_i} が α_i に関する**原子表現**であるとは, $V_{\alpha_i} = \mathbb{C}$ かつ $V_{\alpha_k} = 0\,(\,k \neq i\,)$ で, また任意の $l \in e(\Gamma)$ に対し $f_l = 0$ と定めてできる表現のことをいう.

原子表現はその次元が 1 であるため, 直既約な表現である.

定義 7 $v(\Gamma) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ とする. (Γ, Λ) の表現 V に対し, 非負整数を成分とする n 次元横ベクトルが次のように定まる. これを表現 V の**次元**と呼び $\mathbf{dim}\,V$ と書く. すなわち

$$\mathbf{dim}V = (\mathrm{dim}V_{\alpha_1}, \cdots, \mathrm{dim}V_{\alpha_n}) \in \mathbb{Z}^n \ .$$

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 E_Γ を

$$E_\Gamma = \{(\lambda_\alpha)_{\alpha \in v(\Gamma)}\,;\, \lambda_\alpha \in \mathbb{Q}\}$$

と定める.

定義 8 グラフ Γ の 2 次形式 $B_\Gamma(\boldsymbol{x})$ を

$$B_\Gamma(\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha\in v(\Gamma)} x_\alpha^2 - \sum_{l\in e(\Gamma)} x_{\alpha(l)}x_{\beta(l)} \quad (\,\boldsymbol{x} = (\,x_\alpha; \alpha\in v(\Gamma)\,)\,)$$

で定め,E_Γ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle &= B_\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{1}{2}(B_\Gamma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - B_\Gamma(\boldsymbol{x}) - B_\Gamma(\boldsymbol{y})) \\ &= \sum_{\alpha\in v(\Gamma)} x_\alpha y_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{l\in e(\Gamma)}(x_{\alpha(l)}y_{\beta(l)} + x_{\beta(l)}y_{\alpha(l)})\end{aligned}$$

で定める. この内積に関して,(Γ,Λ) の頂点 α に対して定まる E_Γ 上の直交変換 σ_α を

$$\sigma_\alpha(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}\rangle\boldsymbol{\alpha}$$

と定める. $\sigma_\alpha^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\Gamma}, \det\sigma_\alpha = -1$ を満たすので, σ_α は鏡映変換となる. σ_α を α に関する**ワイル変換**という.

定義 9 $v(\Gamma) = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とするとき, $\sigma_{\alpha_1},\cdots,\sigma_{\alpha_n}$ によって生成される合成変換の集合は群を成す. この群を Γ の**ワイル群**と呼び W_Γ で表す.

$$W_\Gamma = \{\,\sigma \mid \sigma = \sigma_{\alpha_{i_1}}\cdots\sigma_{\alpha_{i_k}}\,(\,i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,n\}\,)\,\}.$$

ワイル変換を用いて, ルートと呼ばれる概念を導入する.
各頂点 α_i に対して E_Γ のベクトル $\boldsymbol{\alpha_i}$ を

$$\boldsymbol{\alpha_i} = (\,x_\alpha\,;\,x_{\alpha_i} = 1\,,\,x_{\alpha_j} = 0\,(i\neq j)\,)$$

と定める.

定義 10 $v(\Gamma) = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とする. E_Γ の元 $\boldsymbol{x}$ が **ルート** であるとは, あるワイル変換 $\sigma\in W_\Gamma$ と $\boldsymbol{\alpha_i}$ によって

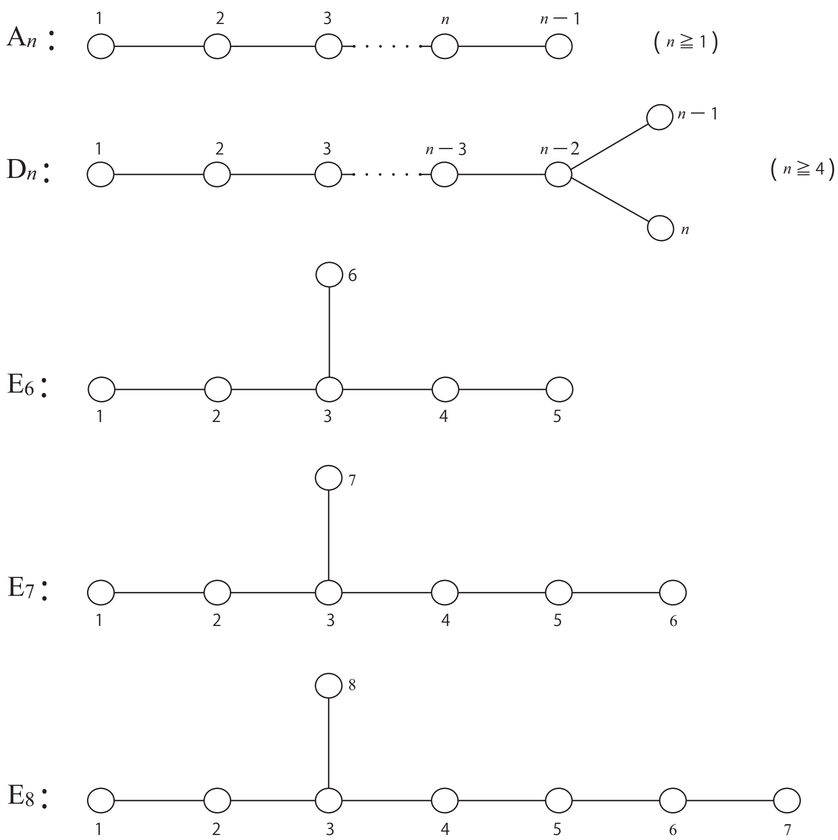
$$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{\alpha_i})$$

となるときをいう. また, ベクトル $\boldsymbol{x}$ のすべての成分が非負であることを $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ と表す. ルート $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{x}$ を **正のルート** という.

ガブリエルの定理を紹介するための準備が整った.

<u>ガブリエルの定理</u>

i) 有向グラフ (Γ,Λ) の直既約表現の同型類の個数が有限であれば, Γ は $A_n\,(n\geqq 1), D_n\,(n\geqq 4), E_6, E_7, E_8$ のいずれかに限る. 但し $A_n\,(n\geqq 1), D_n\,(n\geqq 4), E_6, E_7, E_8$ は次図のように与えられる有向グラフである.



ii) 逆に Γ を $A_n\,(n \geqq 1), D_n\,(n \geqq 4), E_6, E_7, E_8$ の 1 つとすれば, (Γ,Λ) の直既約表現の同型類の個数は有限であり, しかも直既約表現 V にその次元 $\dim V$ を対応させると, この対応

$$V \longmapsto \mathbf{dim} V$$

は直既約表現の（同型による）同値類と E_Γ の正ルートとの間の 1 対 1 の対応を与える.

直既約表現の同型類の個数は表にすれば下記のようになる.

Γ	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
直既約表現の同型類の個数	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120

§2. 正ルートから直既約表現の構成法

この章では, Γ は A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 のいずれかであるとする. このときガブリエルの定理により, E_Γ の正ルートと (Γ,Λ) の直既約表現との間に 1 対 1 対応が存在する. ここでは, その直既約表現を具体的に求める方法を説明する.

有向グラフの頂点のなかで次のような特徴をもつものに注目しよう.

定義 11 (Γ,Λ) の頂点 α について

(i) Γ^α のすべての辺の出発点が α であるとき, α を**湧き出し口**という.

(ii) Γ^α のすべての辺の終点が α であるとき, α を**吸い込み口**という.

ここで, 1 つの (Γ, Λ) が与えられたとき, ある頂点 α を端点とするすべての辺の方向を反対にしてできる有向グラフを $(\Gamma, \sigma_\alpha\Lambda)$ と表そう.

定義 12 (Γ, Λ) の 1 つの湧き出し口 α から, k 本の辺 $l_1, \cdots, l_k$ が出ているとし, $V_i = V_{\beta(l_i)}$, $f_i = f_{l_i}$ とおく. 写像 $f_\alpha^- : V_\alpha \longrightarrow V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ を

$$f_\alpha^-(v) = f_1(v) \oplus \cdots \oplus f_k(v) \quad (v \in V_\alpha)$$

で定め, 自然な射影 j_α^- と包含写像 i_λ を

$$j_\alpha^- : V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \longrightarrow (V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)/\mathrm{Im} f_\alpha^-,$$

$$i_\lambda : V_\lambda \longrightarrow V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \quad (1 \leqq \lambda \leqq k)$$

とする. このとき (Γ, Λ) の 1 つの湧き出し口 α に対して, (Γ, Λ) の各表現 (V, f) から $(\Gamma, \sigma_\alpha\Lambda)$ の表現 (V^-, f^-) を次の条件で定める.

(a) $V_\alpha^- = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)/\mathrm{Im} f_\alpha^- = \mathrm{Coker} f_\alpha^-$

(b) $V_\beta^- = V_\beta \quad (\beta \neq \alpha)$

(c) $f_\lambda^- = f_{l_\lambda}^- = j_\alpha^- \circ i_\lambda \quad (l_\lambda \in \Gamma^\alpha, 1 \leqq \lambda \leqq k)$

(d) $f_l^- = f_l \quad (l \notin \Gamma^\alpha)$

(V^-, f^-) を (V, f) の α に関する吸い込み化といい, $\sigma_\alpha^-(V, f)$ または $\sigma_\alpha^- V$ と表し, σ_α^- を α に関する **吸い込み化変換**という.

注意: 吸い込み化と双対的なものとして,(Γ, Λ) の 1 つの吸い込み口 β に対して, β に関する湧き出し化 $\sigma_\beta^+(V, f)$ と β に関する **湧き出し化変換** σ_β^+ がある. ただし β に置かれる空間と, それに向かう線形写像の定め方は異なる. この論文では吸い込み化変換を用いるが, 湧き出し化変換を用いて直既約表現を求めることも出来る.

定義 13 (Γ, Λ) の頂点の系列 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ が**吸い込み系列** であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことをいう.

(i) α_1 は (Γ, Λ) の吸い込み口である.

(ii) $\alpha_i \, (2 \leqq i \leqq k)$ は $(\Gamma, \sigma_{\alpha_{i-1}} \cdots \sigma_{\alpha_1}\Lambda)$ の吸い込み口である.

n 個の頂点をもつ任意のグラフについて, すべての頂点に適当な番号をつければ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ がこの順序で吸い込み系列を成すようにできる. よって吸い込み系列の定義から $\sigma_{\alpha_1}, \cdots, \sigma_{\alpha_n}$ を順に施すことができる. これを踏まえて次を定義する.

定義 14 (Γ, Λ) をサイクルを含まない有向グラフとし, Γ の頂点が吸い込み系列を成すように番号づけたものを, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ とする. このとき

$$c = \sigma_{\alpha_n} \cdots \sigma_{\alpha_1}$$

を **コクスター変換**という.

$\boldsymbol{x}$ を正のルートとしたときに, $\boldsymbol{x}$ を次元とする直既約表現は以下のように求めることが出来る.
Γ の頂点の列 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ を吸い込み系列とし, それに対応するコクスター変換を

$$c = \sigma_{\alpha_n} \cdots \sigma_{\alpha_1}$$

とする. いま, k を自然数として,

$$(\beta_1, \cdots, \beta_{nk}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

とすると, これも吸い込み系列である.

次の 2 つの定理が成り立つ.

定理 1 $\Gamma = A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ とする. このとき $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を E_Γ の元とすると, ある自然数 k に対して

$$c^k \boldsymbol{x} \ngtr \boldsymbol{0}$$

である.

定理 2 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ を正のルートとすれば, $\alpha \in v(\Gamma)$ に対して

$$\sigma_\alpha(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$$

が成り立つ. 特に, $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ で $\sigma_\alpha(\boldsymbol{x}) \ngtr \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ である.

定理 1 より, $c^k \boldsymbol{x} \ngtr \boldsymbol{0}$ となる自然数 k の中で最小のものをとると,

$$\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\beta_1}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}, \quad \sigma_{\beta_{i+1}} \sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\beta_1}(\boldsymbol{x}) \ngtr \boldsymbol{0}$$

となる $i < nk$ が存在することがわかる. さらに定理 2 より, $\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\beta_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}, \beta_{i+1} = \alpha$ とおけば, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}, \sigma_\alpha(\boldsymbol{y}) \ngtr \boldsymbol{0}$ である. ゆえに, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\alpha}$ すなわち

$$\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\beta_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta_{i+1}}$$

となる. そこで,

$$V = \sigma^-_{\beta_1} \cdots \sigma^-_{\beta_i}(L_{\beta_{i+1}}) \tag{$*$}$$

とすれば, $\mathbf{dim}\sigma^-_\alpha(V) = \sigma_\alpha(\mathbf{dim}V)$, $\sigma^2_\alpha = \mathrm{id}_{E_\Gamma}$ より V は (Γ, Λ) の直既約表現になっており,

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}V &= \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_i}(\boldsymbol{\beta_{i+1}}) \\ &= (\sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_i})(\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\beta_1})(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となっている. このようにして, 正のルート $\boldsymbol{x}$ から, $\boldsymbol{x}$ を次元とする直既約表現 V を構成することができる.

以下では上で説明した方法に則って, $\Gamma = D_4$ に対し正のルートを具体的に与えて, それに対応する直既約表現を求める.
Λ を次図のように定める.

$$
(\ D_4, \Lambda\ ):\quad
\begin{tikzcd}
\alpha_1 \arrow[dr] & \alpha_2 \arrow[d] & \alpha_3 \arrow[dl] \\
& \alpha_0 &
\end{tikzcd}
$$

このとき, $\Gamma = D_4$ の正ルート $\boldsymbol{x}$ は次の $4 \times (4-1) = 12$ 個で尽くされる.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_2,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_3,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_2,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_3,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3,\\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\\
&\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3.
\end{aligned}
$$

以下, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ の場合を考える. $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ は吸い込み系列であるから, コクスター変換は

$$c = \sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_0}$$

で与えられ, $\sigma_{\alpha_0}c^2(\boldsymbol{x}) = \sigma_{\alpha_0}c^2(\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = -\boldsymbol{\alpha}_0$ で初めて負となる. よって $(\sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_0})^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}_0$ なので, $(*)$ より

$$V = (\sigma^-_{\alpha_0}\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3})^2(L_{\alpha_0}).$$

したがって, 原子表現 (L_{α_0}) から出発して, $\sigma^-_{\alpha_3}, \sigma^-_{\alpha_2}, \sigma^-_{\alpha_1}, \sigma^-_{\alpha_0}$ を順に作用させることを 2 度行うことにより, 直既約表現 V が得られる. ただし, 上記の作用によって元の Λ に戻るようにするため, 最初の方向付け Λ_0 は $\Lambda_0 = (\sigma_{\alpha_3}\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_0})^2\Lambda$ にとる.

また, 以下では定義 12(c) における f_λ^- を $f_{i,k}^- = f_{i,k+1}\,(1 \leqq i \leqq 3,\, 1 \leqq k)$ と表す.

まず, α_0 にのみ線形空間 $\mathbb{C}$ を置く原子表現 $(L_{\alpha_0}, \Lambda_0)$ を考える.

$(L_{\alpha_0} , \Lambda_0)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "f_{11}"'] & 0 \arrow[d, "f_{21}"'] & 0 \arrow[dl, "f_{31}"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$f_{11} = f_{21} = f_{31} = 0$

この表現 $(L_{\alpha_0}, \Lambda_0)$ に $\sigma_{\alpha_3}^-$ を 施すと次の表現が出来る. ただし, α_3 に新たに置かれる線形空間は $V_{\alpha_0}/\mathrm{Im} f_{31} = \mathbb{C}/0 \simeq \mathbb{C}$ であり, $\mathrm{Im} f_{31} = 0$ より $f_{32} = \mathrm{id}$ である. したがって

$(\sigma_{\alpha_3}^- (L_{\alpha_0}) , \Lambda_1)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "f_{11}"'] & 0 \arrow[d, "f_{21}"'] & \mathbb{C} \\ & \mathbb{C} \arrow[ur, "f_{32}"'] & \end{tikzcd}$$

$f_{11} = f_{21} = 0, \quad f_{32} = \mathrm{id}$

同様に, $\sigma_{\alpha_2}^-$ と $\sigma_{\alpha_1}^-$ を順に作用させると次の表現ができる.

$(\sigma_{\alpha_2}^- \sigma_{\alpha_3}^- (L_{\alpha_0}) , \Lambda_2)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "f_{11}"'] & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ & \mathbb{C} \arrow[u, "f_{22}"] \arrow[ur, "f_{32}"'] & \end{tikzcd}$$

$f_{11} = 0, \quad f_{22} = f_{23} = \mathrm{id}$

$(\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3}(L_{\alpha_0}), \Lambda_3)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\
& \mathbb{C} \arrow[ul, "f_{12}"] \arrow[u, "f_{22}"] \arrow[ur, "f_{32}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f_{12} = f_{22} = f_{32} = \mathrm{id}$$

さらに, $\sigma^-_{\alpha_0}$ を作用させる.
$f_{12} = f_{22} = f_{32} = \mathrm{id}$ より $\mathrm{Im}(f_{12} \oplus f_{22} \oplus f_{32}) = \mathbb{C}(1,1,1)$ は 1 次元である.
よって, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathrm{Im}(f_{12} \oplus f_{22} \oplus f_{32})$ は 2 次元となり, その基底として $[1 \oplus 0 \oplus 0], [0 \oplus 1 \oplus 0]$ をとることができる. また $(1,1,1) \in \mathrm{Im}(f_{12} \oplus f_{22} \oplus f_{32})$ より, $[1 \oplus 1 \oplus 1] = 0$ である. このことから,

$$\begin{aligned}
f_{13}(x) &= [x \oplus 0 \oplus 0] = x[1 \oplus 0 \oplus 0]\,, \\
f_{23}(x) &= [0 \oplus x \oplus 0] = x[0 \oplus 1 \oplus 0]\,, \\
f_{33}(x) &= [0 \oplus 0 \oplus x] = x[0 \oplus 0 \oplus 1] = x(-[1 \oplus 0 \oplus 0] - [0 \oplus 1 \oplus 0])
\end{aligned}$$

を得る. $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathrm{Im}(f_{12} \oplus f_{22} \oplus f_{32})$ の基底 $[1 \oplus 0 \oplus 0], [0 \oplus 1 \oplus 0]$ と $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の基底 $(1,0)\,,(0,1)$ を対応させて,

$$f_{13}(x) = (x,0),\;\; f_{23}(x) = (0,x),\;\; f_{33}(x) = x(-1,-1) = (-x,-x)$$

と表すことができる. したがって, $(\sigma^-_{\alpha_0}\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3}(L_{\alpha_0}), \Lambda_4)$ は次の図で表される表現になる.

$(\sigma^-_{\alpha_0}\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3}(L_{\alpha_0}), \Lambda_4)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dr, "f_{13}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "f_{23}"] & \mathbb{C} \arrow[dl, "f_{33}"] \\
& \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

$$f_{13}(x) = (x,0), \quad f_{23}(x) = (0,x), \quad f_{33}(x) = (-x,-x)$$

これを続けていくと

$(\sigma^-_{\alpha_3}(\sigma^-_{\alpha_0}\cdots\sigma^-_{\alpha_3})(L_{\alpha_0}), \Lambda_5)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dr, "f_{13}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "f_{23}"] & \mathbb{C} \\
& \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \arrow[ur, "f_{34}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f_{13}(x) = (x,0), \quad f_{23}(x) = (0,x), \quad f_{34}(x,y) = x-y$$

$(\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3}(\sigma^-_{\alpha_0}\cdots\sigma^-_{\alpha_3})(L_{\alpha_0}),\ \Lambda_6)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dr, "f_{13}"'] & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\
 & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \arrow[u, "f_{24}"] \arrow[ur, "f_{34}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f_{13}(x) = (x, 0), \quad f_{24}(x, y) = x, \quad f_{34}(x, y) = x - y$$

$(\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3}(\sigma^-_{\alpha_0}\cdots\sigma^-_{\alpha_3})(L_{\alpha_0}),\ \Lambda_7)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \\
 & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \arrow[ul, "f_{14}"] \arrow[u, "f_{24}"] \arrow[ur, "f_{34}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f_{14}(x, y) = y, \quad f_{24}(x, y) = x, \quad f_{34}(x, y) = x - y$$

$((\sigma^-_{\alpha_0}\cdots\sigma^-_{\alpha_3})^2(L_{\alpha_0}),\ \Lambda_8)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dr, "f_{15}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "f_{25}"] & \mathbb{C} \arrow[dl, "f_{35}"] \\
 & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

$$f_{15}(x) = x, \quad f_{25}(x) = -x, \quad f_{35}(x) = x$$

以上により, $\Gamma = D_4$ の正のルート $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ に対応する直既約表現 $((\sigma^-_{\alpha_0}\sigma^-_{\alpha_1}\sigma^-_{\alpha_2}\sigma^-_{\alpha_3})^2(L_{\alpha_0}),\ \Lambda_8))$ が得られた. 同じ方法で 12 個すべての正のルートに対応する直既約表現を求めることができる. さらに, 他の A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 に関しても同様に, 直既約表現を求めることができる.

参考文献

[1] 草場公邦 「行列特論」, 裳華房, 1979 年