3辺3頂点からなる quiver algebra の表現論の研究
–indecomposable projective modules の決定 –

表現論研究室　　宮本 賢伍

1 Introduction

quiver とは有向グラフのことであり, 表現論の分野において quiver を用いた表現は有効な手法である. 特に有限次元の代数に対する quiver 表現は 1970 年代に Gabriel が導入して以来, 現代でも盛んに研究されている. 代数の表現に quiver を用いることには次の 3 つの利点がある. 1 つ目は与えられた代数を quiver と関係式で記述することで, その代数の構造を視覚的に捉えることができることである. 2 つ目は代数上の加群を, その代数の quiver を用いて記述することで, その加群における種々の計算を線形代数的なものに帰着できることである. 3 つ目は quiver と関係式を与えることで, 容易に代数の具体例を作ることができることである.

代数の表現論では, その代数上の加群を明らかにすることがひとつの目標である. 有限次元代数の quiver による表現は, その同型を除き, これ以上分解できない表現 –indecomposable な表現 – の直和に分解できることが知られている. 従って, ある quiver に対してその indecomposable な表現を決定することは重要である. 代数が持つ indecomposable な表現が同型を除いて有限個で尽くされるとき, その代数は **finite representation type** であると呼ばる. Gabriel は finite representation type の代数に対応する quiver は Dynkin グラフと呼ばれる特別な形をした有限グラフであることが必要十分であり, 更にその indecomposable な表現の構成法を示した.[1]

代数は, その積を作用とみなすことにより, それ自身を表現とみなすことができる. この表現は正則表現と呼ばれ, 代数の表現の構造を知るための鍵となる表現を多く含む. 従って, その代数上の正則表現の構造を調べることで知りたい表現の大部分を捉えることができる. 正則表現は indecomposable projective なものに分解されることが知られており, indecomposable projective なものをすべて求めることで, その代数上の正則表現の構造がわかる. Gabriel の結果より, quiver の形が Dynkin グラフでない場合には, その indecomposable な表現の個数は有限には収まらず, すべてを決定することは困難である. しかし, 正則表現の indecomposable な表現の直和因子, すなわち indecomposable projective な表現を決定することは比較的易しいことが多い. 本稿では, quiver の形が Dynkin グラフではない, 特に 3 辺 3 頂点をもつ quiver をすべて挙げ, その projective indecomposable な加群を決定する.

本稿の構成は以下の通りである. まず第 2 章では本稿で用いる quiver や path algebra などの概念をいくつか定義し, それらがもつような基本的な性質を紹介する. また有限次元代数 A の右 A 加群を対象とする圏と, quiver の表現を対象とする圏が圏同値になることについて述べる. 第 3 章では quiver Q が与えられたとき, その表現の indecomposable projective な加群を求める方法を述べる. 第 4 章ではその手法を具体的に 3 辺 3 頂点をもつ quiver に用いて, indecomposable projective な加群をすべて決定する. 更にそこからわかる代数的違いをみるため, 代数の母関数を定義し, それを用いて duality と代数による同型との差をみる.

謝辞　1 年間, 足りない私を熱心に指導してくださった和久井道久先生に心から感謝申し上げます. また, 4 年間, 指導してくださった数学科の先生方, 共に学んだ学科の先輩, 後輩, 同期の皆様に感謝申し上げます.

2 Representations of Algebras and Quivers

ここでは以後の章で必要となる基本的な概念を記述する. 証明や詳しい記述などは文献 [1, 3, 4] などを参照し, ここでは証明は略す. 本稿全体を通して, 体 $\boldsymbol{k}$ は標数 0 の代数的閉体として, テンソル積は $\boldsymbol{k}$ 上でとるものとする.

[1] これは **Gabriel の定理** [1, VII-5.10], [5, 第 2 章 定理 13] と呼ばれている.

2.1 algebra とその表現

$\boldsymbol{k}$ ベクトル空間 A と線形写像 $m : A \otimes A \longrightarrow A$ および $\eta : \boldsymbol{k} \longrightarrow A$ が与えられていて, m と η の間に次の等式が満たされているときに 3 つ組 (A, m, η) を $\boldsymbol{k}$ 上の**代数 (algebra over $\boldsymbol{k}$)**[2] といい, 以下 $\boldsymbol{k}$ 代数という.

(i) $m \circ (m \otimes \mathrm{id}_A) = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes m)$

(ii) $m \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta)$

ここで $a, b \in A$ に対して $m(a \otimes b)$ を ab と表し, これを a と b の積といい, $\boldsymbol{k}$ の単位元 1 に対して $\eta(1)$ を 1_A とかく. $\boldsymbol{k}$ 代数 A を $\boldsymbol{k}$ ベクトル空間とみたときの次元を, $\boldsymbol{k}$ 代数 A の次元と呼ぶ. 代数 A に対して, A に定められた積を逆にして得られる代数を A^{op} と表す. すなわち A^{op} とは, A におけるベクトル空間の構造があり, その積 $*$ が $a * b = ba$ により与えられる $\boldsymbol{k}$ 代数のことをいう. 以下, A は $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数を表すこととする.

$\boldsymbol{k}$ ベクトル空間 M に対して線形写像 $\mathrm{act} : M \otimes A \longrightarrow M$ が与えられていて, 次の 2 条件を満たすとき, 組 (M, act) を**右 A 加群 (right A-module)** という. 本稿では, 右 A 加群を単に A 加群といい, 記号で M_A とかく.

(i) $\mathrm{act}(m \otimes 1_A) = m \quad \text{for} \quad \forall m \in M$

(ii) $\mathrm{act}(\mathrm{act}(m \otimes a) \otimes b) = \mathrm{act}(m \otimes ab) \quad \text{for} \quad \forall m \in M,\ \forall a, b \in A$

act を M の A への作用といい, 以下では $\mathrm{act}(m \otimes a)$ を ma とかく. 左 A 加群は A^{op} 加群として定義する. A 加群 M が **indecomposable** であるとは, M が加群として非自明な直和分解をもたないときをいう. すべての A 加群のアーベル $\boldsymbol{k}$ 圏を $\mathrm{Mod}A$ とおき, そのなかで有限生成加群を対象にもつ充満部分圏を $\mathrm{mod}A$ とかくこととする. このとき反変関手 $D = \mathrm{Hom}(-, \boldsymbol{k})$ により $\mathrm{mod}A$ と $\mathrm{mod}A^{\mathrm{op}}$ の間の双対 [3] が与えられ, D を**標準 $\boldsymbol{k}$ 双対**と呼ぶ.

A のすべての極大右イデアルの共通部分を A の**ヤコブソン基根 (Jacobson radical)** といい, 記号で $\mathrm{rad}(A)$ とかく. また, A 加群 M の**ヤコブソン基根**はすべての極大右部分加群の共通部分として定め, これを $\mathrm{rad}(M)$ とかく.

A の元 e で $e^2 = e$ となるようなものを A の**冪等元 (idempotent)** という. 特に $0, 1 \in A$ は自明な冪等元である. A の元 e が非自明な冪等元であれば $1 - e$ もそうであって, e と $1 - e$ は直交し,[4] 非自明な直和分解 $A_A = eA \oplus (1-e)A$ を与える. また e が中心的 [5] であれば $1 - e$ もそうであって, A の代数としての分解 $A = eA \oplus (1 - e)A$ を与える. A の中心的冪等元が $0, 1$ のみに限るときに A は代数として **indecomposable** であると呼ばれる. A は有限次元なので, A の原始冪等元で互いに直交し, $1_A = \sum_{i=1}^{n} e_i$ となるようなものの集合 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ によって直和分解 $A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$ が得られる. このような原始冪等元の集合 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を A の**原始直交冪等元の完全系**という. まずは原始直交冪等元の完全系をひとつ固定しておくが, A の表現論の研究において, 後に記す Krull-Schmidt-Azumaya の定理により完全系の取り方は考慮しなくともよいことがわかる. 冪等元について次の命題が成り立つ.

命題 2.1. [4, 3-3-2] 非自明な直和分解 $A_A = M_1 \oplus M_2$ と $1 = e_1 + e_2$ $(e_i \in M_i,\ i = 1, 2)$ があったとき, e_1 と e_2 は互いに直交する A の冪等元であって $M_i \simeq e_i A$ となり, 更に $e_i A$ が indecomposable であることと e_i が原始的であることは必要十分である.

有限次元代数の表現論の研究において, 次はよく知られた基本的な結果である.

定理 2.2 (Krull-Schmidt-Azumaya)**.** [1, I-4.10], [3, I-4.6], [4, 3-2-10]

(i) 任意の $M \in \mathrm{mod}A$ は indecomposable なものに直和分解することができる. 更にこのとき, 直和因子の自己同型 $\boldsymbol{k}$ 代数は局所的である, すなわちただ一つの極大右イデアルをもつ.

(ii) M の 2 通りの直和分解 $M \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ $(M_i, N_j$ は indecomposable$)$ があったとき, $m = n$ であって, $\{1, \ldots, n\}$ の置換 σ が存在し, 各 i について $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$ とできる.

[2] $A = 0$ のときも代数とみなす.

[3] 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の反変関手 F が圏同値を与える, すなわち $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と $\mathcal{D}$ が圏同値であるとき, F を双対 (dual) と呼び, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は双対関係であるという.

[4] 一般に, A の 2 つの冪等元 e, f が $ef = 0 = fe$ となるとき, e と f は直交するという.

[5] A の冪等元 e が, 任意の A の元 a に対して $ea = ae$ となるとき, e は中心的であるという.

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を A の原始直交冪等元とする. $i \neq j$ なるすべての $1 \leq i, j \leq n$ に対して $e_iA \not\simeq e_jA$ となるときに A は **basic** であるという. 一般には $\boldsymbol{k}$ 代数 A は basic ではないが, その原始直交冪等元の完全系 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に対して $e_A = e_{j_1} + \cdots + e_{j_k}$ を, $i \neq l$ ならば $e_iA \not\simeq e_lA$ で各 e_iA は $e_{j_1}A, \ldots, e_{j_k}A$ のなかの一つと同型になるように選び, $A^b := e_AAe_A$ と定めると A^b は basic な $\boldsymbol{k}$ 代数となる. これを $\boldsymbol{A}$ **に関する basic 代数**と呼ぶ. 次の定理から, $\boldsymbol{k}$ 代数 A の表現論の研究の観点からみたとき, A に関する basic 代数 A^b を研究することに帰着できる. 従って, 本稿で考える $\boldsymbol{k}$ 代数 A は単位元をもつ indecomposable な basic 代数であることを仮定する.

定理 2.3. [1, I-6.10], [3, II-6.16] $A^b = e_AAe_A$ を A に関する basic 代数とする. このとき mod$A$ と modA^b の間の $\boldsymbol{k}$ 線形な圏同値が存在する.

2.2 quiver とその表現

現代の有限次元 $\boldsymbol{k}$ 代数の表現論の研究において, quiver と呼ばれる道具を用いた代数の解析手法があり, 視覚的に有用な手法として用いられている.

定義 2.1 (quiver)**.** **quiver** とは, 頂点の集合 Q_0, 矢印の集合 Q_1, 矢印 α に対して, その source と target を対応させる写像 $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ からなる 4 つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことであり, 以後, 単に Q とかく. Q_0, Q_1 が有限集合となるとき, Q は finite quiver であると呼ばれる.

以下, Q の頂点を $1, 2, \ldots, n$ とラベル付けし, $s(\alpha) = i,\ t(\alpha) = j$ となる矢印 α を $\alpha : i \longrightarrow j$ と書き, 次のように図示する.

$$\underset{i}{\circ} \xrightarrow[\alpha]{\qquad\qquad} \underset{j}{\circ}$$

矢印 α の向きを変えたものを α^{-1} とかくこととする. $a, b \in Q_0$ に対して, a から b への長さ $k\ (\geq 0)$ の **path** とは Q_1 の元の列 $(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \mid b)$ であって, $s(\alpha_1) = a,\ t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})\quad (1 \leq i \leq k-1),\ t(\alpha_k) = b$ となるものをいう. $a \in Q_0$ に対して $\varepsilon_a = (a \mid\mid a)$ とおく. 長さ 1 以上の path で, その path に存在する 1 つの矢印の source が, path に存在しているある矢印の target になっているときに, その path を **cycle** という. cycle のない quiver を **acyclic** な quiver という. Q_0 の元 a, b に対して a から b への長さ $k\ (\geq 1)$ の **walk** とは, 矢印の列 $(a \mid \alpha_1^{m_1}, \ldots, \alpha_k^{m_k} \mid b)\quad (m_j \in \{1, -1\})$ で $s(\alpha_1^{m_1}) = a,\ t(\alpha_i^{m_i}) = s(\alpha_{i+1}^{m_{i+1}})\ (1 \leq i \leq k-1),\ t(\alpha_k^{m_k}) = b$ となるものをいい, Q が **connected** であるとは, 任意の頂点 $a, b \in Q_0$ に対して a から b への walk が存在するときをいう. 以後, acyclic quiver に対して頂点 i から j への path が存在すれば $i \leq j$ になるようにラベル付けする.

一般に Q が与えられたとき, そこから自然に $\boldsymbol{k}$ 代数を構成することができる. Q の path 全体を基底にもつような $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間を考え, これを $\boldsymbol{k}Q$ とおく. $\boldsymbol{k}Q$ の基底 $(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l \mid b)$, $(c \mid \beta_1, \ldots,\ \beta_k \mid d)$ 間に積を,

$$(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l \mid b)(c \mid \beta_1, \ldots, \beta_k \mid d) = \delta_{bc}(a \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_k \mid d)$$

で定め, これを線形に拡張し, $\boldsymbol{k}Q$ に積を導入する. ただし, δ_{bc} は Kronecker delta である. こうして $\boldsymbol{k}$ 上の代数の構造をいれた $\boldsymbol{k}Q$ を quiver Q の **path algebra** という.

finite connected quiver Q に対して, Q_1 の元で生成されている $\boldsymbol{k}Q$ の両側イデアルを R_Q と書き, これを **arrow ideal** という. Q が finite で acyclic であれば, $\boldsymbol{k}Q$ は有限次元な path algebra であって, その逆も成立する. このとき次の命題が成り立つ.

命題 2.4. Q を connected, acyclic な finite quiver とする. このとき $\boldsymbol{k}Q$ は単位元をもつ basic で indecomposable な有限次元代数であって, $\mathrm{rad}\,(\boldsymbol{k}Q) = R_Q$ であり, 集合 $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ は $\boldsymbol{k}Q$ の原始直交冪等元の完全系である.

例 2.1. 次の quiver Q を考える.

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow{\ \alpha_1\ } \underset{2}{\circ} \xleftarrow{\ \alpha_2\ } \underset{3}{\circ} - - - - - \underset{n-2}{\circ} \xleftarrow{\ \alpha_{n-1}\ } \underset{n-1}{\circ} \xleftarrow{\ \alpha_{n-2}\ } \underset{n}{\circ}$$

このとき $i \leq j$ に対して $\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1} \longmapsto E_{ij}$ と定めれば, 代数同型 $\boldsymbol{k}Q \simeq \mathbb{T}_n$ を得る. ただし E_{ij} は i 行 j 列が 1 で, 他の成分が 0 であるような n 次正方行列とし, $\mathbb{T}_n$ は成分が $\boldsymbol{k}$ の元であるような下三角 n 次行列代数である. 一般に, acyclic な finite quiver Q に対して $\boldsymbol{k}Q$ は下三角に成分をもつような n 次行列代数 [6] に同型である. □

[6] 一般に下三角成分 a_{ij} は $\boldsymbol{k}^{l_{ij}}$ $(l_{ij} \geq 0)$ の元である.

例 2.2. 次の quiver Q を考える.

$$\begin{tikzcd} \circ\, 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

このとき $\alpha^i \longmapsto x^i$ $(i \geq 0,\ \alpha^0 = \varepsilon_1)$ と定めることで代数同型 $\boldsymbol{k}Q \simeq \boldsymbol{k}[x]$ を得る. □

一般に, 上で構成した path algebra は有限次元でない. そこで次で定義する admissible ideal で path algebra を割ることにより, 有限次元な $\boldsymbol{k}$ 代数を作ることができる.

定義 2.2 (admissible ideal)**.** Q を finite quiver, R_Q を $\boldsymbol{k}Q$ の arrow ideal とする. $\boldsymbol{k}Q$ の両側イデアル $\mathcal{I}$ が **admissible** であるとは, ある整数 $m \geq 2$ で $R_Q^m \subset \mathcal{I} \subset R_Q^2$ となるものが存在するときをいう.

もし $\mathcal{I}$ が $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal であったとき, 組 $(Q, \mathcal{I})$ は **bound quiver** と呼ばれる. このとき商代数 $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ を **bound quiver algebra** という.[7]

例 2.2 に現れる $\boldsymbol{k}$ 代数は無限次元の path algebra であったが, 例えば $\boldsymbol{k}Q$ のひとつの admissible ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha^3 \rangle$ で割ることで, bound quiver algebra $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I} \simeq \boldsymbol{k}[x]/\langle x^3 \rangle$ を得る.

admissible ideal に関連して quiver の relation を定義しよう.

定義 2.3 (relation)**.** Q を quiver とする. このとき $\boldsymbol{k}$ 上の Q の **relation** ρ とは, source と target が同じで長さが 2 以上であるような path の $\boldsymbol{k}$ 線形な和 $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ $(\lambda_i \in \boldsymbol{k} \backslash 0)$ で表されるものをいう. 特に $n = 1$ のとき, relation ρ を **zero relation** という.

path algebra $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ はここで導入した relation で記述できる.

補題 2.5. [1, II-2.9], [3, I-1.6] Q を finite quiver とする. このとき $\boldsymbol{k}Q$ の adissible ideal $\mathcal{I}$ は有限個の relation で生成される.

以上のようにして finite connected quiver と admissible ideal によって path algebra $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ が構成できたが, ここで得た bound quiver algebra は indecomposable な basic 代数であり, rad $(\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$ である. 更に, その原始直交冪等元の完全系として $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ をとることができる.

逆に与えられた basic 代数に対して quiver が定義され, その quiver とある relation によって, 与えられた代数が再構成できることがわかる. 再構成の仕方は次の通りである. 有限次元な basic $\boldsymbol{k}$ 代数 A に対してその原始直交冪等元の完全系 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を与え, $d_{ij} = \dim_{\boldsymbol{k}} e_i \left(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A)\right) e_j$ とおく. このとき A の **ordinary quiver** Q_A を次で定める.[8]

(i) Q_A の頂点の集合は $\{1, 2, \ldots, m\}$ とする.

(ii) i から j へ d_{ij} 本の矢印を引く.

こうして定めた Q_A によって A を復元することができる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 2.6. [1, II-3.7] path algebra $\boldsymbol{k}Q_A$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ で $A \simeq \boldsymbol{k}Q_A/\mathcal{I}$ なるものが存在する.

$\boldsymbol{k}$ 代数 A の研究において, quiver が視覚的にも有効な手法であることを述べたが, 更に言及して A 加群の研究に quiver による手法を用いることができる. それが quiver の表現と呼ばれるものであり, Gabriel によってその有用性が確かめられた. 定義から始める.

定義 2.4 ($\boldsymbol{k}$ 線形表現)**.** Q を finite quiver とする. Q の $\boldsymbol{k}$ **線形表現** $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ を以下で定める.

(i) 各頂点 $a \in Q_0$ に $\boldsymbol{k}$ ベクトル空間 M_a を対応させる.

(ii) 各矢印 $\alpha : a \to b \in Q_1$ に線形写像 $\varphi_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$ を対応させる.

---

[7] この bound quiver algebra $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ は有限次元である.
[8] 定理 2.2 によって, 原始直交冪等元の完全系の取り方に Q_A は依存しない.

$M = (M_a, \varphi_\alpha)$ が有限次元であるとは, 各頂点に対応するベクトル空間 M_a がすべて有限次元であるときをいう.

Q の表現 $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ から $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ への **morphism** $f : M \longrightarrow M'$ とは, 線形写像 $f_a : M_a \longrightarrow M'_a$ の組 $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ であって, $\alpha : a \to b$ $(\alpha \in Q_1)$ に対して $f_b \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha \circ f_a$ を満たすものをいう.

quiver Q の $\boldsymbol{k}$ 線形表現を対象とし, それらの間の morphism を射とするようなアーベル $\boldsymbol{k}$ 圏を $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$ と置き, その充満部分圏で有限次元 $\boldsymbol{k}$ 線形表現を対象にもつものを $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$ とおく.

$M = (M_a, \varphi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$ をとる. a から b への任意の非自明な Q の path $w = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ に対して, $\varphi_w = \varphi_{\alpha_n} \cdots \varphi_{\alpha_1}$ と定める. これを $\boldsymbol{k}$ 線形的に拡張して, Q の relation $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ を与えたとき $\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{w_i}$ として定める. $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ に対して, $\mathcal{I}$ におけるすべての relations ρ で $\varphi_\rho = 0$ となっているときに M は **$\mathcal{I}$ によって有界**であるという. $\mathcal{I}$ が有限個の relation ρ_i によって生成されていれば, $M \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$ が $\mathcal{I}$ によって有界であることとすべての ρ_i について $\varphi_{\rho_i} = 0$ であることが同値である. $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$ (resp. $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q)$) のなかで $\mathcal{I}$ によって有界であるものを対象にもつような充満部分圏を $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ (resp. $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$) とおく.

finite quiver Q と $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ に対して, $A = \boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ とおく. $\mathrm{Mod}A$ から $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ への $\boldsymbol{k}$ 線形共変関手 F を, $M_A \in \mathrm{Mod}A$ に対して $F(M_A) = (M_a, \varphi_\alpha)$ と定義する. ここで $a \in Q_0$ ならば $e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I}$ を考え, $M_a = Me_a$ を対応させる. また, $\alpha : a \to b \in Q_1$ ならば $\varphi_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$ を $x \in M_a$ に対して $\varphi_\alpha(x) = x(\alpha + \mathcal{I})$ と定める. こうして定めた φ_α は線形写像であって, $\mathcal{I}$ によって有界であるから $F(M_A) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ である. また, A 加群準同型写像 $f : M_A \longrightarrow M'_A$ に対して morphism $F(f) : F(M_A) \longrightarrow F(M'_A)$ を, 各頂点 $a \in Q_0$ における線形写像 $f_a : M_a \longrightarrow M'_a$ を f の M_a への制限として定める. 逆に $G : \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{Mod}A$ を次で決定する. $(M_a, \varphi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ に対して $G((M_a, \varphi_\alpha)) = \bigoplus_{a \in Q_0} M_a$ (右 A 加群としての直和) で定める. $\boldsymbol{k}$ 線形表現 (M_a, φ_α), (M'_a, φ'_α) 間の morphism $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ に対して $G((M_a, \varphi_\alpha))$, $G((M'_a, \varphi'_\alpha))$ 間の A 加群準同型写像を直和の各成分ごとに写したもの, すなわち $G(f) = \bigoplus_{a \in Q_0} f_a$ として定める. このとき自然変換 $FG \simeq 1_{\mathrm{Mod}A}$, $GF \simeq 1_{\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q,\mathcal{I})}$ が存在することから次の定理を得る.

定理 2.7. [1, Ⅲ-1.6], [3, I-2.10] Q を finite connected quiver とし, $\mathcal{I}$ を $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal, $A = \boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ とおく. このとき $\boldsymbol{k}$-線形圏同値

$$F : \mathrm{Mod}A \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$$

が存在する. また, これの制限は $\mathrm{mod}A$ と $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ の間の $\boldsymbol{k}$-線形圏同値を与える.

一般に quiver Q に対して Q の矢印をすべて逆にしたものを Q の **opposite quiver** といい, Q^{op} とかく. すなわち $Q_1^{\mathrm{op}} = \left\{\alpha^{-1} \mid \alpha \in Q_1\right\}$ である. Q の path $w = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ に対して Q^{op} の path w^{op} を $\alpha_n^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$ で定義する. Q の relation ρ に対して, Q^{op} の relation ρ^{op} も同様にして定める. また quiver Q の admissible ideal $\mathcal{I} = \langle \rho_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ に対して, Q^{op} の admissible ideal $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ は $\langle \rho_i^{\mathrm{op}} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ と定める. 上で定義した F, G および標準 $\boldsymbol{k}$ 双対 D を用いることで $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ と $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q^{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{op}})$ の間には双対関係がある.

$$FDG : \mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I}) \xrightarrow{\text{duality}} \mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q^{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{op}})$$

3 The Indecomposable Projective modules

A 加群 P が **projective** であるとは, 任意の全準同型 $h : M \longrightarrow N$ から誘導される A 加群準同型写像 $\mathrm{Hom}(P, h) : \mathrm{Hom}(P, M) \ni \varphi \longmapsto h \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(P, N)$ が全射であるときをいう. これは P がある自由加群の直和因子であることと同値である. 特に e が冪等元であれば eA は projective であり, 更に原始的であれば e_iA は indecomposable でもある. A 加群 E が **injective** であるとは, 任意の単準同型 $u : M \longrightarrow N$ から誘導される A 加群準同型 $\mathrm{Hom}(u, E) : \mathrm{Hom}(N, E) \ni \varphi \longmapsto \varphi \circ u \in \mathrm{Hom}(M, E)$ が全射であるときをいう. $\mathrm{mod}A$ の projective な A 加群を対象に持つような部分圏を $\mathrm{proj}A$, injective な A 加群を対象にもつような部分圏を $\mathrm{inj}A$ とおく. 標準 $\boldsymbol{k}$ 双対 D によって, 任意の有限生成 projective (resp. injective) A 加群 M に対して, $D(M)$ は injective (resp. projective) A^{op} 加群である.

$$\mathrm{proj}A \underset{D}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \mathrm{inj}A^{\mathrm{op}}$$

A が **self-injective** であるとは, A_A が injective であることである. これは A の任意の projective な加群が injective であることと同値である.

indecomposable projective modules については次の定理が成り立つ.

定理 3.1. [1, I-5.17] $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を A の原始直交冪等元の完全系とする. このとき A の任意の indecomposable projective な A 加群は $e_1A, \dots, e_nA$ のいずれかひとつと同型である.

この章では $(M_a, \varphi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ を A 加群としてみたときに, その indecomposable projective modules を決定する方法を述べる. このとき定理 2.2 から, 有限次元の projective A 加群はこれら indecomposable projective modules から復元できる. 定理 2.7 の F は projective や indecomposable を保つので $P(i) := F(e_iA)$ をすべて決定すれば, 定理 3.1 により $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ における任意の indecomposable projective なものは $P(a)$ $(a \in Q_0)$ のいずれかと同型になるから, $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ における projective indecomposable modules はすべて決定できたことになる. 従って先に述べたように $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ における projective なものを復元することができる. 更に下記の定理 3.2 より $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ における単純加群 [9] をすべて決定できる. 以上の理由から $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ における projective indecomposable なものをすべて決定することは有効である. 以下では一般的に知られている結果を述べ, それを適用し, 次の章で具体的に 3 辺 3 頂点の場合の bound quiver algebra の indecomposable projective modules を求める.

$(Q, \mathcal{I})$ を finite connected quiver Q とその path algebra $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal によって有界付けられたものとする. A を bound quiver algebra $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ とおく. $a \in Q$ に対して $F(e_aA)$ を具体的に計算すると $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ は次で与えられていることがわかる. $P(a)_b$ は a から b への path に対して, 集合 $\{w + \mathcal{I} \mid w \text{ は } a \text{ から } b \text{ への path}\}$ のなかで一次独立なものからなるものを基底としてもつような $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間であり, 矢印 $\beta : b \to c$ に対して, 線形写像 $\varphi_\beta : P(a)_b \longrightarrow P(a)_c$ を $\overline{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ を右からかける写像で定める. こうして $P(a)$ がわかった.

indecomposable projective modules e_aA が分かれば, その $\mathrm{top}(e_aA) = e_aA/\mathrm{rad}(e_aA)$ を計算することで単純 A 加群がすべて決定できる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 3.2. [3, I-8.28] $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ を A の原始直交冪等元の完全系とする. このとき任意の単純 A 加群は $\mathrm{top}(e_1A), \dots, \mathrm{top}(e_nA)$ のいずれかひとつと同型である.

そこで定理 3.2 をみれば, 代数の世界における top が $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ のなかでどのように反映されているのかが気になる. その為に, まずは $\mathrm{rad}(A)$ がどのように反映されているのかをみる. $\mathrm{rad}(A) = \mathrm{rad}(\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$ であって, A 加群 M に対して $\mathrm{rad}(M) = M(R_Q/\mathcal{I}) = \sum_{\alpha \in Q_1} M(\alpha + \mathcal{I})$ となる. この操作を $M = (M_a, \varphi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ の各頂点 $a \in Q_0$ で行えば, $\mathrm{rad}(M) = (J_a, \psi_\alpha)$ とおくと

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
J_a & = & \sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Im}(\varphi_\alpha : M_b \longrightarrow M_a) \\
\psi_\alpha & = & \varphi_\alpha|_{J_a}
\end{array}
\right.
$$

で定められる. よって $M = (M_a, \varphi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ に対して $\mathrm{top}(M) = (N_a, \psi_\alpha) \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ は次で与えられていることがわかる.

$$
\begin{array}{lcl}
N_a & = & \begin{cases} M_a & \text{if } a \in Q_0 \text{ is source,} \\ \sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Coker}(\varphi_\alpha : M_b \longrightarrow M_a) & \text{if } a \in Q_0 \text{ is not source.} \end{cases} \\
\psi_\alpha & = & 0 \quad \text{for every arrow } \alpha \text{ of source } a.
\end{array}
$$

こうして各 $\mathrm{top}(P(a)) = (S(a)_b, \varphi_\alpha) = S(a)$ は次の形をしていることがわかる. $b \neq a$ なる頂点には 0, $b = a$ では 1 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{k}$ である. 従ってすべての $\alpha \in Q_1$ に対応する線形写像 φ_α は 0 が対応する. 確かにこれは単純であって, 定理 3.2 より $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ はすべての単純 A 加群を $\mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ の世界に圏同値で写した際の完全系になっている. 以上の結果をまとめて次を得る.

[9] 部分加群が自身と 0 のみの A 加群.

定理 3.3. [1, Ⅲ-2.1, 2.4] $(Q, \mathcal{I})$ を bound quiver, $A = KQ/\mathcal{I}$, $P(a) = e_a A$, $(a \in Q_0)$ とおく.

(i) $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ は次で与えられる. $P(a)_b$ は集合 $\{w + \mathcal{I} \mid w$ は a から b への path$\}$ のなかで一次独立なものを基底としてもつ $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間であり, φ_β は次で定められる線形写像である.

$$\varphi_\beta : P(a)_b \ni x \longmapsto x\overline{\beta} \in P(a)_c \quad \text{for} \quad \beta : b \to c \in Q_1.$$

(ii) $\mathrm{rad}(P(a)) = (P'(a)_b, \varphi'_\beta)$ は次で与えられる. $b \neq a$ であれば $P'(a)_b = P(a)_b$ とし, $P'(a)_a$ は集合

$$\{w + \mathcal{I} \mid w \neq \varepsilon_a \text{は } a \text{ から } a \text{ への path}\}$$

のなかで一次独立なものを基底とする $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間である. また, φ_β は次で定まる線形写像である.

$$\varphi'_\beta = \begin{cases} \varphi_\beta & \text{for any arrow } \beta \text{ of source } b \neq a \\ \varphi_\alpha|_{P'(a)_a} & \text{for any arrow } \alpha \text{ of source } a. \end{cases}$$

(iii) 任意の $a \in Q_0$ において, $S(a)$ を A 加群とみたときに, これは $\mathrm{top}(P(a))$ と同型である. 更に集合 $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ は単純 A 加群の同型類の完全系になっている.

4 Representations of quivers with 3 egdes and 3 vertices.

第 3 章では $M \in \mathrm{Rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ に対して, その indecomposable projective modules を決定する方法を述べた. この章では具体的にすべての 3 辺 3 頂点の quiver をリストアップし, その indecomposable projective modules を決定する. 3 辺 3 頂点の quiver を並べると図 1 の 15 通りの形で尽くされる. 本稿で扱う quiver は 2 行 3 列目の quiver とし, これを以下, Q と記すこととする.

Q は cycle を含むので, その indecomposable projective modules を決定する前に $\boldsymbol{k}Q$ をその admissible ideal で割らなければならない. しかし, Q の relation の取り方は有限個には収まらないので, admissible ideal $\mathcal{I}$ の生成元の取り方は自由度が大きい. 従って本稿では $\mathcal{I}$ は zero relation によって生成される adissible ideal であることを仮定する. Q において考え得る zero relation を列挙すれば次の 7 通りである.

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$\alpha\gamma$	$(\alpha\beta)^n$	$(\alpha\beta)^n\alpha$	$(\alpha\beta)^n\alpha\gamma$	$(\beta\alpha)^n$	$(\beta\alpha)^n\gamma$	$(\beta\alpha)^n\beta$

これらのうち単体で $\mathcal{I}$ の生成元になり得るのは ②, ③, ⑤, ⑦ の 4 通りであって, $\mathcal{I}$ の生成元を 2 つに増やせば, 表に示す 18 通り存在する. 以下, 順に admissible ideal の生成元の数を $3, 4, \ldots, 7$ と増やせるが, 計算方法は同じなので 2 つまでで止めておく.

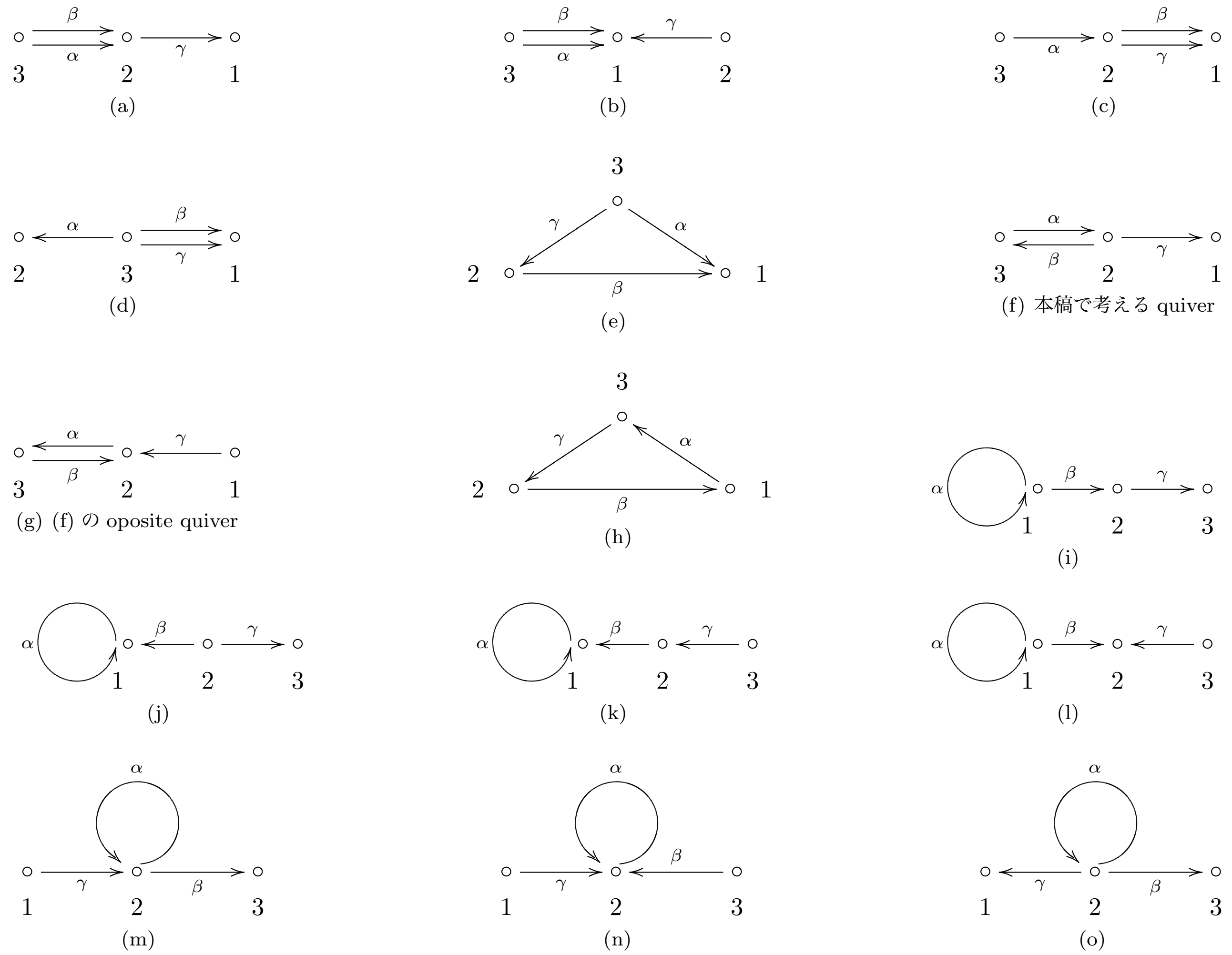
定理 3.3 の結果に基づいてそれぞれの場合に $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ の indecomposable projective modules $P(1), P(2), P(3)$ を計算することができる. はじめに如何なる admissible ideal で $\boldsymbol{k}Q$ を割ろうとも $P(1)$ は $S(1)$ と同型であることがわかる.

$$P(1) = \left(0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0 \xrightarrow[0]{} \boldsymbol{k} \right) = S(1)$$

次に $P(2), P(3)$ であるが, zero relation 2 つまでで生成される admissible ideal によって $\boldsymbol{k}Q$ を割ったときに現れるものは図 3 に示す Type A, B, C, D, E, F のいずれかであることがわかる. ただし, $J(\lambda, m)$ は固有値 λ に対する m 次ジョルダンブロック, $[E_n\ 0]$ は n 次単位行列に 0 のみの行を加えたもの, $[E_m\ 0]$ は m 次単位行列に 0 のみの列を幾つか加えたもの,[10] ${}^t[0\ E_n]$ は n 次単位行列に 0 のみの行を加えたもので, ${}^t[0\ E_m]$ は m 次単位行列に 0 のみの行を幾つか加えたものある.[11] 最後に示した表は $P(2), P(3)$ の計算結果をまとめたものである. この表において右から admissible ideal の生成元として用いる zero relation, $P(2)$ の Type, $P(3)$ の Type, $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ の母関数を並べている. ここに母関数とは定義 4.1 で導入する関数である. ただし, admissible ideal の生成元が 2 つのときは,

[10] 加えない場合も考え, その場合は n 次単位行列である.
[11] 同様に加えない場合も考える.

図 1: すべての 3 辺 3 頂点の quiver



それぞれの n の大小で場合分けが必要であるから, 先に与えられる relation の乗数を n とし, もう一方の relation に表れる乗数を m とする. 例えば zero relation ②,③の場合は $\mathcal{I} = \langle(\alpha\beta)^n,\ (\alpha\beta)^m\alpha)\rangle$ である.

第 2 章で述べたように Q と Q^{op} の表現の間には双対関係がある. しかしそれぞれの quiver に対して $P(i)$ を決定していくなかで, この双対の間には大きな差があることがわかった. その差を見る為に $\boldsymbol{k}$ 代数の母関数を導入する. 次に示す命題 4.1 によって母関数は代数としての差を見る上で有効である.

定義 4.1 (母関数)**.** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を A の原始直交冪等元とする. A の**母関数** (**generating function**) を

$$f_A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{\dim(e_i A)}$$

で定める. 特に, bound quiver $(Q, \mathcal{I})$ に対して $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ の母関数は $f_{(Q,\mathcal{I})}(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{\dim(P(i))}$ で定める.

命題 4.1. $\boldsymbol{k}$ 代数 A の母関数 $f_A(x)$ は代数同型のもとでの不変量である. すなわち 2 つの $\boldsymbol{k}$ 代数 A, B に対して, 代数として $A \simeq B$ ならば $f_A(x) = f_B(x)$ となる.

Proof. $\boldsymbol{k}$ 代数 A, B と代数同型写像 $f : A \longrightarrow B$ があったとき, B 加群 M に対して A への作用を

$$M \otimes A \ni m \otimes a \longmapsto mf(a) \in M$$

と定義することで自然と A 加群とみなすことができる. この見方によって, B 加群で indecomposable projective なもの全体と A 加群で indecomposable projective なもの全体との間に $1:1$ 対応が得られる.

$$\{\text{indecomposable projective } B \text{ 加群 }\} \xrightarrow{f} \{\text{indecomposable projective } A \text{ 加群 }\}$$

この対応は次元を保つから $f_A(x) = f_B(x)$ である. □

最も簡単な場合で比較しても, 代数としての違いは如実に現れる. $\boldsymbol{k}Q$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ を②で与えられたものとすれば, 表より $f_{(Q,\mathcal{I})}(x) = x + x^{3n} + x^{3n+2}$ である. 一方, Q^{op} において②で生成される admissible ideal $\mathcal{I}$ に対応する $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ は $(\beta\alpha)^n$ によって生成されている. このとき $P(1), P(2), P(3)$ は次の形をしている.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^n \arrow[r, shift right, "{[E_n\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[l, shift right, "{{}^t[0\ E_n]}"'] & \boldsymbol{k} \arrow[l, "{{}^t[10\cdots0]}"'] \end{tikzcd}$$

(a) $P(1)$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^n \arrow[r, shift right, "{[E_n\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[l, shift right, "{{}^t[0\ E_n]}"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd}$$

(b) $P(2)$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^n \arrow[r, shift right, "{J(0,n)}"'] & \boldsymbol{k}^{n} \arrow[l, shift right, "1"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd}$$

(c) $P(3)$

図 2: bound quiver $(Q^{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{op}})$ の $P(i)$ $(i = 1, 2, 3)$

このとき $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ と $\boldsymbol{k}Q^{\mathrm{op}}/\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ の次元は両者とも $6n + 3$ であるので, これらはベクトル空間としては同型である. しかし, $\boldsymbol{k}Q^{\mathrm{op}}/\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ の母関数は $f_{(Q,\mathcal{I})}(x) = x^{2n} + x^{2n+1} + x^{2n+2}$ であるから, $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ の母関数の形が異なることにより命題 4.1 から $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ と $\boldsymbol{k}Q^{\mathrm{op}}/\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ は $\boldsymbol{k}$ 代数として同型でない. このように母関数を用いることで, dual の関係にある 2 つの bound quiver algebra が代数のレベルで違うことがわかる. 更に, 次の命題から $f_{(Q,\mathcal{I})}$ と $f_{(Q^{\mathrm{op}},\mathcal{I}^{\mathrm{op}})}$ を比べることで $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ が self-injective でないこともわかる.

命題 4.2. $A \simeq \boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ が self-injective であれば $f_{(Q,\mathcal{I})}(x) = f_{(Q^{\mathrm{op}},\mathcal{I}^{\mathrm{op}})}(x)$ である.

Proof. $\{P(a) \mid a \in Q_0\}$ を $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ の indecomposable projective な加群の完全系であるとすれば, A は self-injective なので, 先の集合は $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q, \mathcal{I})$ の indecomposable injective な加群の完全系である. 従ってこれらを D で写したものは $\mathrm{rep}_{\boldsymbol{k}}(Q^{\mathrm{op}}, \mathcal{I}^{\mathrm{op}})$ の indecomposable projective な加群の完全系であって, D は次元を保つので, $f_{(Q,\mathcal{I})}(x) = f_{(Q^{\mathrm{op}},\mathcal{I}^{\mathrm{op}})}(x)$ である. □

quiver Q' を (h) の quiver とする. このとき $Q' = Q'^{\mathrm{op}}$ である. また $\boldsymbol{k}Q'$ の admissible ideal $\mathcal{I}$ の生成元を $\alpha\beta\gamma,\ \beta\gamma\alpha,\ \gamma\beta\alpha$ で与える. このとき $\boldsymbol{k}Q'/\mathcal{I}$ は self-injective であり, その母関数 $f_{(Q',\mathcal{I})}$ は次の形をしている.

$$f_{(Q',\mathcal{I})}(x) = f_{(Q'^{\mathrm{op}},\mathcal{I}^{\mathrm{op}})}(x) = 3x^3.$$

参考文献

[1] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, 2006

[2] Maruce Auslander, Idun Reiten, Sverre O. Smal∅, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge University Press, 1995

[3] Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata, Frobenious Algebras I. Basic Representation Theory, European Mathematical Society, 2011

[4] 岩永恭雄, 佐藤眞久, 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002

[5] 草場公邦, 行列特論, 裳華房, 1979

図 3: $P(2), P(3)$ の Type

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^n \arrow[r, shift left, "J(0,n)"] & \boldsymbol{k}^n \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

I Type A

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^n \arrow[r, shift left, "1"] & \boldsymbol{k}^n \arrow[l, shift left, "J(0,n)"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

II Type B

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[r, shift left, "J(0,n+1)"] & \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

III Type C

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[r, shift left, "1"] & \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[l, shift left, "J(0,n+1)"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

IV Type D

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[r, shift left, "{[E_n\ 0]}"] & \boldsymbol{k}^{n} \arrow[l, shift left, "{{}^t[0\ E_n]}"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

V Type E

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{k}^{n} \arrow[r, shift left, "{{}^t[0\ E_n]}"] & \boldsymbol{k}^{n+1} \arrow[l, shift left, "{[E_n\ 0]}"] \arrow[r, "{[E_m\ 0]}"'] & \boldsymbol{k}^m \end{tikzcd}$$

VI Type F

$P(2), P(3)$ の決定と $\boldsymbol{k}Q/\mathcal{I}$ の母関数

relation	$P(2)$			$P(3)$			$f_{(Q,\mathcal{I})}(x)$		
②	F $(m \to n+1)$			B $(m \to n)$			$x + x^{3n} + x^{3n+2}$		
③	C $(m \to n+1)$			E $(m \to n)$			$x + x^{3n+1} + x^{3n+3}$		
⑤	A $(m \to n)$			E $(m \to n)$			$x + x^{3n} + x^{3n+1}$		
⑦	F $(m \to n+1)$			D $(m \to n+1)$			$x + x^{3n+2} + x^{3n+3}$		
① ②	F $(m \to 1)$			B $(m \to 0)$			$x + x^{2n} + x^{2n+2}$		
① ③	C $(m \to 1)$			E $(m \to 0)$			$x + x^{2n+1} + x^{2n+3}$		
① ⑤	A $(m \to 1)$			E $(m \to 0)$			$x + 2x^{2n+1}$		
① ⑦	F $(m \to 1)$			D $(m \to 0)$			$x + 2x^{2n+2}$		
	$n > m$	$n = m$	$n < m$	$n > m$	$n = m$	$n < m$	$n > m$	$n = m$	$n < m$
② ③	C $(n \to m,\ m \to m+1)$	F $(m \to m+1)$		E $(n \to m)$			$x + x^{3m+1} + x^{3m+3}$	$x + x^{3n} + x^{3n+2}$	
② ④	F $(m \to m+1)$	F		B			$x + x^{2n+m} + x^{2n+m+2}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$	
② ⑤	A $(n \to m)$	A	F $(m \to n+1)$	E $(n \to m)$	B	B $(m \to n)$	$x + x^{3m} + x^{3m+1}$	$x + 2x^{3n}$	$x + x^{3n} + x^{3n+2}$
② ⑥	F	F		B			$x + x^{2n+m} + x^{2n+m+1}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$	
② ⑦	F $(n \to m,\ m \to m+1)$	F $(m \to m+1)$		D $(n \to m,\ m \to m+1)$			$x + x^{3m+2} + x^{3m+3}$	$x + x^{3n} + x^{3n+2}$	
③ ④	C $(m \to m+1)$	C $(m \to m+1)$		E			$x + x^{2n+m+1}$ $+x^{2n+m+3}$	$x + x^{3n+1} + x^{3n+3}$	
③ ⑤	A $(n \to m)$	A	C $(m \to n+1)$	E $(n \to m)$	E	E $(m \to n)$	$x + x^{3m} + x^{3m+1}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$	$x + x^{3n+1} + x^{3n+3}$
③ ⑥	C	C		E			$x + x^{2n+m+1}$ $+x^{2n+m+2}$	$x + x^{3n+1} + x^{3n+2}$	
③ ⑦	F $(n \to m,\ m \to m+1)$	F $(m \to m+1)$		D $(n \to m,\ m \to m+1)$			$x + x^{3m+2} + x^{3m+3}$	$x + x^{3n+1} + x^{3n+2}$	
④ ⑤	A $(n \to m)$	A	A $(m \to m+1)$	E $(n \to m)$	E	E	$x + x^{3m} + x^{3m+1}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$	$x + 2x^{2n+m+1}$
④ ⑦	F $(n \to m,\ m \to m+1)$	F	F $(m \to m+1)$	D $(n \to m,\ m \to m+1)$	D	D	$x + x^{3m+2} + x^{3m+3}$	$x + 2x^{3n+2}$	$x + 2x^{2n+m+2}$
⑤ ⑥	A	A	A	E	E	E	$x + x^{2n+m}$ $+x^{2n+m+1}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$	$x + x^{3n} + x^{3n+1}$
⑤ ⑦	F $(n \to m,\ m \to m+1)$			D $(n \to m,\ m \to m+1)$			$x + x^{3m+2} + x^{3m+3}$		
⑥ ⑦	F $(n \to m,\ m \to m+1)$	F	F	D $(n \to m,\ m \to m+1)$	D	D	$x + x^{3m+2} + x^{3m+3}$	$x + x^{3n+1} + x^{3n+2}$	$x + x^{n+2m+1}$ $+x^{n+2m+2}$

注意：表中の矢印は, 各タイプの乗数の読み替えを表す. 例えば, F $(n \to m, m \to m+1)$ は Type F において n を m に, m を $m+1$ に読み替える.