

正多面体の回転による商空間の基本群

小路 史朗 (表現論研究室)

§1. Introduction

2つの位相空間が同相であるか否かを判定するために、様々な有用な位相不変性や位相不変量がある。基本群もその1つであり、トポロジーの研究でよく使われている。基本群は、loop という目に見えるものを使って定義されるので、イメージしやすいという利点がある。基本群はまた、与えられた位相空間の幾何的な情報を群という代数的なもので記述するため、幾何学と代数学を結ぶ働きもある。実際、任意に群が与えられた時、その群を基本群に持つような位相空間が存在するので、代数的対象である群を基本群として幾何学的に研究することもできる。

セミナーでは Allen Hatcher 著『Algebraic Topology』[1]を読んだ。その中で、中身の詰まった正六面体(立方体)に回転による同一視を入れた商空間の基本群が巡回しない有限群である四元数群 Q_8 になる例を扱った。基本群として Q_8 が生じたことに私は興味を持った。

本論文では上記の例を説明するとともに、他の正多面体に対しても同じようなルールで回転による同一視を導入し、その商空間の基本群を計算する。基本群の計算においては、各商空間が有限セル複体の構造を持つことを利用し、Van Kampen's Theorem を用いて計算する。

本論文の構成は次の通りである。まず、§2 で基本群の定義やその基本的な性質について述べる。次に、§3 で有限セル複体の定義や、その基本群を計算する際に有用な結果を述べる。これを用いて、上述の例の基本群を実際に計算する。最後に、§2、§3 で述べた結果を用いて、§4 で本論文のメインテーマである正多面体の回転による商空間の基本群を計算する。そして、基本群とオイラー標数を比較することにより、このようにして得られる各商空間が互いに同相でないことを示す。

§2. Preliminaries

このセクションでは、基本群に関する諸概念を説明する。また、基本群の位相不変性を証明し、基本群の計算に対して有用な定理 (Van Kampen's Theorem) を述べる。

Definition 2.1 X を位相空間とする。連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow X$ を X 内の**道** (path) といい、 $f(0)$ を**始点**、 $f(1)$ を**終点**という。 $f(0) = f(1)$ となるような X 内の道を X 内の**ループ** (loop) といい、 $f(0) = f(1)$ を**基点** (basepoint) という。また、任意の $s \in [0, 1]$ に対して、 $f(s) = f(0)$ となるような X 内の道 f を、 $f(0)$ を基点とする**定値道** といい、 $\varepsilon_{f(0)}$ と書く。

Definition 2.2 f を位相空間 X 内の道とする。このとき、 $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow X$ を

$$\bar{f}(s) = f(1 - s)$$

と定義する。 \bar{f} は X 内の道となる。また、 g も X 内の道とし、 $f(1) = g(0)$ とする。このとき、 $f * g : [0, 1] \rightarrow X$ を

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ g(2s - 1) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

と定義する。 $f * g$ も X 内の道となる。

Definition 2.3 X を位相空間とし、 f, g を X 内の道とする。このとき、次の条件を満たすような連続写像 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在するとき、 f と g は**端点を固定してホモトープである** といひ、 $f \simeq_{\text{rel}} g$ と書く：

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s), H(s, 1) = g(s) && \text{for all } s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= f(0), H(1, t) = f(1) && \text{for all } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

この関係 \simeq_{rel} は、 $P(X, x_0) := \{ f \mid f \text{ は } x_0 \text{ を基点とする } X \text{ 内の loop } \}$ 上の同値関係になる。この同値関係による商集合を $\pi_1(X, x_0)$ と書く： $\pi_1(X, x_0) = P(X, x_0) / \simeq_{\text{rel}}$ 。

Definition 2.4 $\pi_1(X, x_0)$ の2元 $[f], [g]$ に対し、well-defined に定まる積

$$[f] \circ [g] = [f * g]$$

により $\pi_1(X, x_0)$ は群をなす。この群を、 x_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) という。一般に、基本群は基点の取り方に依存するが、考えている位相空間が弧状連結な場合は、基点の取り方に依存せず全て同型である。

Definition 2.5 X, Y を位相空間とし、 $x_0 \in X$ を基点とする。 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする。このとき、 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ を

$$f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

と定義すると、これは well-defined な準同型写像になる。この f_* を、 f から誘導される基本群の間の**誘導準同型** (induced homomorphism) という。

基本群はホモトピー同値不変性を持つ。すなわち、次が成り立つ。

Theorem 2.6 (基本群のホモトピー同値不変性)

X, Y を位相空間とする。 $x_0 \in X$ を基点とする。また、 $f : X \rightarrow Y$ をホモトピー同値写像、すなわち $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ かつ $g \circ f \simeq \text{id}_X$ となるような連続写像 $g : Y \rightarrow X$ が存在するとする。このとき、誘導準同型 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ は同型写像となる。したがって、 $X \simeq Y$ ならば $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$ となる。ここで、 \simeq は2つの位相空間がホモトピー同値であることを表す。

これを示すために Lemma を1つ用意する。

Lemma 2.7 X, Y, Z を位相空間とし、 $x_0 \in X$ を基点とする。

- (1) $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ を連続写像とする。このとき、3つの誘導準同型 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)), g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Z, (g \circ f)(x_0)), (g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, (g \circ f)(x_0))$ に対して、 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ。
- (2) $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ をホモトープな連続写像とし、 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となるような f と g の間のホモトピーとする。 $h : [0, 1] \rightarrow Y$ を $h(t) = F(x_0, t)$ と定め、 $\beta_h : \pi_1(Y, g(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ を $\beta_h([\gamma]) = [h * \gamma * \bar{h}]$ と定める。このとき、次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, \mathbf{x}_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Y, \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \\ & \searrow f_* & \downarrow \beta_h \\ & & \pi_1(Y, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \end{array}$$

(proof)

- (1) 任意の $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して、 $(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$ より、 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ となる。

(2) 任意の $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して、 $f_*([\gamma]) = (\beta_h \circ g_*)([\gamma])$ 、すなわち $[f \circ \gamma] = [h * (g \circ \gamma) * \bar{h}]$ を示すとよい。任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $h_t: [0, 1] \rightarrow Y$ を $h_t(s) = h(ts)$ とし、 $F_t: X \rightarrow Y$ を $F_t(x) = F(x, t)$ とする。 $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ を次のように定める：

$$H(s, t) = (h_t * (F_t \circ \gamma) * \bar{h}_t)(s).$$

この H により $\varepsilon_{f(x_0)} * (f \circ \gamma) * \varepsilon_{f(x_0)} \simeq_{\text{rel}} h * (g \circ \gamma) * \bar{h}$ となる。 $f \circ \gamma \simeq_{\text{rel}} \varepsilon_{f(x_0)} * (f \circ \gamma) * \varepsilon_{f(x_0)}$ なので、 $f \circ \gamma \simeq_{\text{rel}} h * (g \circ \gamma) * \bar{h}$ となる。 よって $[f \circ \gamma] = [h * (g \circ \gamma) * \bar{h}]$ である。 \square

(proof of Theorem 2.6)

次の系列を考えよう：

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, (g \circ f)(x_0)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, (f \circ g \circ f)(x_0))$$

最初の2つの写像の合成について、 $g \circ f \simeq \text{id}_X$ より Lemma 2.7 から $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \beta_h \circ \text{id}_{X_*} = \beta_h$ となる。最後の等号は、 $\text{id}_{X_*} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ であることを用いた。 $\beta_h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ が同型写像なので、 $g_* \circ f_*$ もそうである。よって、 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ は単射となる。同様に、この系列の2つ目と3つ目の写像の合成 $f_* \circ g_*$ も同型写像になるので、 g_* も単射となる。 $g_* \circ f_*$ が全単射で g_* が単射なので、 f_* は全射となる。よって、 f_* は同型写像である。 \square

2つの位相空間が同相であればそれらはホモトピー同値になる。よって、Theorem 2.6 から基本群の位相不変性が導かれる。これを Corollary としておく：

Corollary 2.8 (基本群の位相不変性)

X, Y を位相空間とする。 $x_0 \in X$ を基点とする。また、 $X \cong Y$ とし、 $f: X \rightarrow Y$ を同相写像とする。ここで、 \cong は2つの位相空間が同相であることを表す。このとき、誘導準同型 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ は同型写像となる。

一般に、与えられた位相空間の基本群を定義通りに求めるのは容易ではない。実用上は、次の Van Kampen's Theorem を応用するのが便利である。証明は [1, Theorem 1.20] を参照してほしい。

Theorem 2.9 (Van Kampen's Theorem)

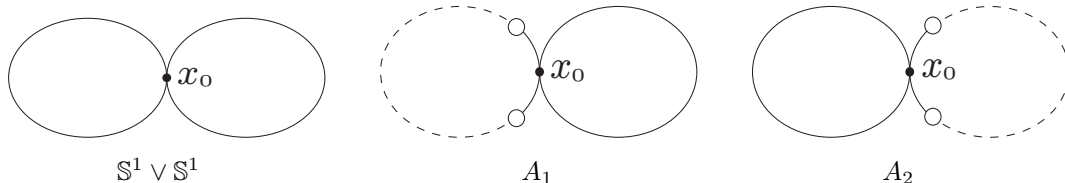
X を位相空間、 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を X の弧状連結な開被覆とする。 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ を基点に取る。このとき、任意の $\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $A_\alpha \cap A_\beta$ が弧状連結であり、かつ任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ に対して $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ が弧状連結ならば、

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0) / N$$

となる。ただし、 $*$ は群の自由積を表し、 N は $\{i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} \mid \alpha, \beta \in \Lambda, \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0)\}$ によって生成される $*_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0)$ の正規部分群を表す。また、 $i_{\alpha\beta}: \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0) \rightarrow \pi_1(A_\alpha, x_0)$ 、 $i_{\beta\alpha}: \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0) \rightarrow \pi_1(A_\beta, x_0)$ は、それぞれ包含写像 $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ 、 $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\beta$ から誘導される誘導準同型である。 \square

2つの S^1 の wedge sum $S^1 \vee S^1$ (2つの S^1 の1点和) やトーラス $S^1 \times S^1$ 、クラインの壺 Kb などの基本群を定義通りに計算するのは難しいが、この Van Kampen's Theorem を用いると簡単に計算することができる。例として $S^1 \vee S^1$ の基本群を計算してみよう。

Example 2.10 ($S^1 \vee S^1$ の基本群)



基点 x_0 を図の位置に取る。 A_1, A_2 を図のように取ると、 $\{A_1, A_2\}$ は $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ の弧状連結な開被覆で、 $x_0 \in A_1 \cap A_2$ となっている。さらに、 $A_1 \cap A_2$ は弧状連結である。よって、Van Kampen's Theorem より

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \cong \pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0) / N \quad (*)$$

となる。ここで、 N は $\{i_*(\omega)j_*(\omega)^{-1} \mid \omega \in \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)\}$ によって生成される $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ の正規部分群を表す。また、 i_*, j_* はそれぞれ、包含写像 $i: A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_1, j: A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_2$ により誘導される誘導準同型である。ここで、 $A_1 \cap A_2 \simeq \{x_0\}, A_1 \simeq \mathbb{S}^1, A_2 \simeq \mathbb{S}^1$ より Theorem 2.6 から、 $\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) \cong \{e\}, \pi_1(A_1, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}, \pi_1(A_2, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ となる。よって、 (*) より

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

を得る。より一般に、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1$ を n 個の \mathbb{S}^1 の wedge sum とすると、

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1, x_0\right) \cong \overbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}^{n \text{ 個}}$$

が成り立つ。

§3. Applications to Cell Complexes

本論文のメインテーマでもある、正多面体の回転による商空間の基本群を求めるために、Van Kampen's Theorem を有限セル複体に適用する (Proposition 3.2)。ここで、“ n -cell” とは、開円板 $\text{Int}\mathbb{D}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1\}$ と同相な位相空間を表す。特に、0-cell は 1 点集合を表す。まず、有限セル複体の定義を紙面の都合により簡潔に述べる。厳密な定義は [1, Chapter 0, Cell Complexes] を参照。

Definition 3.1 次のようにして帰納的に作られる位相空間 X^n を **n 次元セル複体** (n -dimensional cell complex) という：

- (1) X^0 を離散空間とし、その各点を 0-cell と見なしておく。
- (2) 任意の $1 \leq k \leq n$ に対して、 **k -skeleton** X^k を、連続写像 $\varphi_\alpha: \partial\mathbb{D}_\alpha^k \rightarrow X^{k-1} (\alpha \in \Lambda(k))$ によって、 k -cell の族 $\{e_\alpha^k\}_{\alpha \in \Lambda(k)}$ を X^{k-1} に貼り付けて得られる位相空間とする。

X を弧状連結な位相空間とする。 X に次元が 3 以上の cell を貼りつけても、基本群は変わらない (この事実は、次の Proposition 3.2 と同様に証明できる)。そこで、 X に 2-cell を貼ることによって、基本群がどのように変化するか調べよう。

$\{e_\alpha^2\}_{\alpha \in A}$ を 2-cell の族とする。各 $\alpha \in A$ に対し、連続写像 $\varphi_\alpha: \partial\mathbb{D}_\alpha^2 \rightarrow X$ によって e_α^2 を X に貼り付ける。このようにして得られる位相空間を Y とする。各 $\alpha \in A$ に対し、 $s_0 \in \partial\mathbb{D}_\alpha^2$ を固定すると、 φ_α は $\varphi_\alpha(s_0)$ を基点とする X 内の loop と見なすことができる。この loop を単に φ_α と書くことにする。 $x_0 \in X$ を取る。各 $\alpha \in A$ に対し、 γ_α を、 x_0 を始点とし $\varphi_\alpha(s_0)$ を終点とする X 内の道とする。 $\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \overline{\gamma_\alpha}$ は x_0 を基点とする X 内の道となる。このとき、次の Proposition が成り立つ。証明は [1, Proposition 1.26] を参照。

Proposition 3.2 X, Y を上のような位相空間とすると、次の同型が成り立つ：

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / N.$$

ただし、 N は $\{\gamma_\alpha * \varphi_\alpha * \overline{\gamma_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ によって生成される $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群である。

この Proposition を使って、§1 で述べた正六面体に回転による同一視を入れた商空間の基本群を計算してみよう。

Example 3.3 [1, Chapter 1, Section 1.2, Exercise 14]

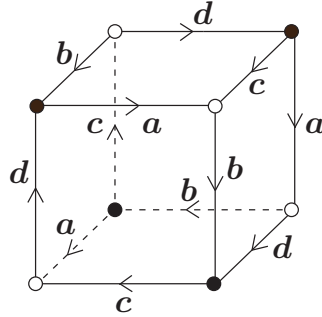


図 3.1

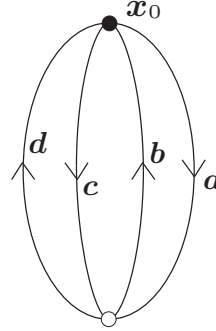


図 3.2

中身の詰まった正六面体 (立方体) において、各面を向かい合う面と次のルールで同一視して得られる商空間を X_6 と書くことにする：一方の面を重心を中心に 90 度時計回りに回転させた時に、対応する点同士を同一視する。図 3.1 のように同一視を入れると、 X_6 が得られる。ここで、図 3.1 には辺の同一視しか書いていないが、面の同一視も入っていることに注意する。(i) X_6 の基本群 (ii) その可換化 (iii) X_6 のオイラー標数 の 3 つを計算しよう。

(i) X_6 の基本群を計算する。 X_6 は 3 次元セル複体であり、その cell 構造は、

$$0\text{-cell} \cdots 2 \text{ 個}, 1\text{-cell} \cdots 4 \text{ 個}, 2\text{-cell} \cdots 3 \text{ 個}, 3\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}$$

となっている。 X_6 の 1-skeleton を Y_6 と書くことにする。 Y_6 は図 3.2 のようなグラフになる。黒丸を x_0 とし、これを基点に選ぶ。Van Kampen's Theorem を繰り返し適用することで、

$$\pi_1(Y_6, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle x, y, z \mid - \rangle$$

となることが分かる。ここで、各 \mathbb{Z} の生成元は $x := ab$, $y := cb$, $z := cd$ に対応している。ところで、3-cell を貼りつけても基本群は変わらないので、 X_6 の基本群を計算するためには、 X_6 の 2-skeleton の基本群を計算するとよい。 X_6 の 2-skeleton は、 Y_6 に 3 個の 2-cell をそれぞれ、 $abcd = xz$, $adb^{-1}c^{-1} = xy^{-1}zy^{-1}$, $ac^{-1}d^{-1}b = xy^{-1}z^{-1}y$ に沿って境界を貼ることで得られる。よって、Proposition 3.2 より、

$$\begin{aligned} \pi_1(X_6, x_0) &\cong \langle x, y, z \mid xz = xy^{-1}zy^{-1} = xy^{-1}z^{-1}y = e \rangle \\ &\cong \langle x, y \mid xy^{-1}x^{-1}y^{-1} = xy^{-1}xy = e \rangle \end{aligned} \quad (**)$$

となる。上の関係子を用いて計算すると、 $x^4 = e$, $y^2 = x^2$, $yx = x^3y$ が分かるので、

$$\pi_1(X_6, x_0) \cong \{e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$$

となる。 $1 \longleftrightarrow e$, $-1 \longleftrightarrow x^2$, $i \longleftrightarrow x$, $-i \longleftrightarrow x^3$, $j \longleftrightarrow y$, $-j \longleftrightarrow x^2y$, $k \longleftrightarrow xy$, $-k \longleftrightarrow x^3y$ と対応させることにより、

$$\pi_1(X_6, x_0) \cong \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} = Q_8$$

となることが分かる。ここで、 Q_8 は四元数群を表す。

(ii) $\pi_1(X_6, x_0)$ の可換化を求める。 $(**)$ において、関係子に $xyx^{-1}y^{-1} = e$ を加えて可換化すると、関係子は $y^{-2} = x^2 = xyx^{-1}y^{-1} = e$ となる。これを变形すると $x^2 = y^2 = xyx^{-1}y^{-1} = e$ となるので、 $(\pi_1(X_6, x_0))$ の可換化 $\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ を得る。

(iii) 先程の cell 構造を用いて X_6 のオイラー標数を計算すると、 $\chi(X_6) = 2 - 4 + 3 - 1 = 0$ となる。

§4. Fundamental Groups of Quotient Spaces of Regular Polyhedra by Rotations

Example 3.3 で正六面体の回転による商空間 X_6 の基本群とその可換化、オイラー標数の3つを求めた。このセクションでは正多面体(プラトンの立体)が、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5つしか存在しないことを踏まえ、正八面体、正十二面体、正二十面体の3つの場合に関して、同様の商空間を考え、

- (i) 基本群 (ii) その可換化 (iii) オイラー標数

の3つを計算する。さらに、それらを比較することにより各商空間が互いに同相でないことも示す。なお、今回は正四面体の商空間については考察していない。これは、正四面体は各面に対して向かい合う面が存在しないので、考えたい同一視が定義できないからである。

① 正八面体の場合

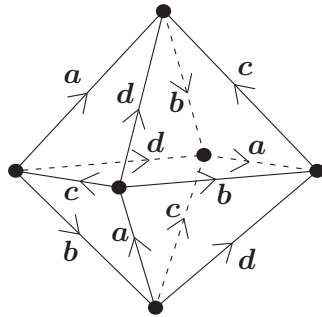


図 4.1

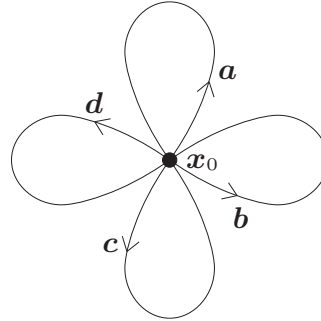


図 4.2

中身の詰まった正八面体において、各面を向かい合う面と次のルールで同一視して得られる商空間を X_8 と書くことにする：一方の面を重心を中心に60度時計回りに回転させた時に、対応する点同士を同一視する。図4.1のように同一視を入れると、 X_8 が得られる。 X_6 の場合と同様に、面の同一視も入っていることに注意する。

- (i) X_8 の基本群を計算しよう。 X_8 も X_6 と同様に3次元セル複体である。その cell 構造は、

$$0\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}, 1\text{-cell} \cdots 4 \text{ 個}, 2\text{-cell} \cdots 4 \text{ 個}, 3\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}$$

となっている。 X_8 の1-skeletonを Y_8 と書くことにする。 Y_8 は図4.2のように、4つの S^1 の wedge sum となる。黒丸を x_0 とし、これを基点に選ぶ。Example 2.10 より、

$$\pi_1(Y_8, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b, c, d \mid - \rangle$$

となる。 X_6 の場合と同様に、 X_8 の基本群を計算するには、その2-skeletonの基本群を計算するとよい。 X_8 の2-skeletonは、 Y_8 に4個の2-cellをそれぞれ、 $ad^{-1}c$, bcd^{-1} , acb , abd^{-1} に沿って境界を貼ることで得ることができる。よって、Proposition 3.2 より X_8 の基本群は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \pi_1(X_8, x_0) &\cong \langle a, b, c, d \mid ad^{-1}c = bcd^{-1} = acb = abd^{-1} = e \rangle \\ &\cong \langle a, b, c \mid ab^{-1}a^{-1}c = bcb^{-1}a^{-1} = acb = e \rangle \\ &\cong \langle a, b \mid ab^{-1}a^{-2}b^{-1} = ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = e \rangle \end{aligned}$$

- (ii) $\pi_1(X_8, x_0)$ の可換化を求める。関係子に $aba^{-1}b^{-1} = e$ を加えて可換化すると、関係子は $a^{-1}b^{-2} = a^{-2}b^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = e$ となる。これを変形すると、 $a = b$, $a^3 = e$ となるので、 $(\pi_1(X_8, x_0) \text{ の可換化}) \cong \mathbb{Z}_3$ となる。

(iii) X_8 のオイラー標数は、 $\chi(X_8) = 1 - 4 + 4 - 1 = 0$ である。

②正十二面体の場合

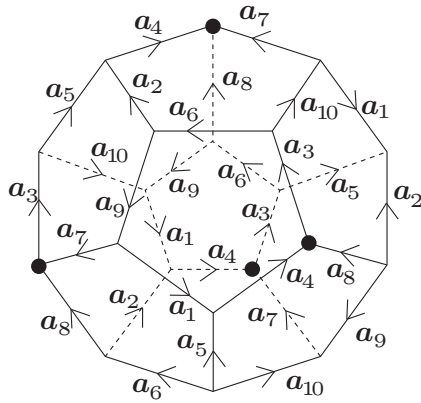


図 4.3

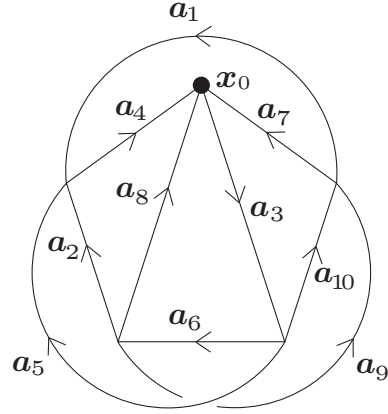


図 4.4

中身の詰まった正十二面体において、各面を向かい合う面と次のルールで同一視して得られる商空間を X_{12} と書くことにする：一方の面を重心を中心に 36 度時計回りに回転させた時に、対応する点同士を同一視する。この同一視は図 4.3 のようになる。

(i) X_{12} の基本群を計算しよう。 X_{12} も 3 次元セル複体である。その cell 構造は

$$0\text{-cell} \cdots 5 \text{ 個}, 1\text{-cell} \cdots 10 \text{ 個}, 2\text{-cell} \cdots 6 \text{ 個}, 3\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}$$

となっている。 X_{12} の 1-skeleton を Y_{12} と書くことにする。 Y_{12} は図 4.4 のような完全グラフになる。黒丸を x_0 とし、これを基点に選ぶ。 Van Kampen's Theorem を繰り返し適用することで、

$$\pi_1(Y_{12}, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle x, y, z, a, b, c \mid - \rangle$$

となることが分かる。ここで、各 \mathbb{Z} の生成元は、

$$\begin{aligned} x &:= a_7^{-1} a_1 a_4, & y &:= a_3 a_{10} a_7, & z &:= a_3 a_{10} a_9^{-1} a_8 \\ a &:= a_4^{-1} a_2^{-1} a_8, & b &:= a_8^{-1} a_2 a_5^{-1} a_3^{-1}, & c &:= a_3 a_6 a_8 \end{aligned}$$

に対応している。 X_{12} の 2-skeleton は、 Y_{12} に 6 個の 2-cell をそれぞれ

$$\begin{aligned} a_3 a_6 a_9 a_1 a_4 &= c z^{-1} y x, & a_3 a_{10} a_1 a_2^{-1} a_8 &= y x a, & a_7^{-1} a_{10}^{-1} a_6 a_2 a_4 &= y^{-1} c a^{-1} \\ a_3 a_5 a_2^{-1} a_9 a_7 &= b^{-1} z^{-1} y, & a_7^{-1} a_1 a_5^{-1} a_6 a_8 &= x a b c, & a_4^{-1} a_5^{-1} a_{10} a_9^{-1} a_8 &= a b z \end{aligned}$$

に沿って境界を貼ることで得ることができる。よって、 Proposition 3.2 より、 X_{12} の基本群は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \pi_1(X_{12}, x_0) &\cong \langle a, b, c, x, y, z \mid c z^{-1} y x = y x a = y^{-1} c a^{-1} = b^{-1} z^{-1} y = x a b c = a b z = e \rangle \\ &\cong \langle a, b, c, x, y \mid c a b y x = y x a = y^{-1} c a^{-1} = b^{-1} a b y = x a b c = e \rangle \\ &\cong \langle a, b, c, x \mid c a b (c a^{-1}) x = (c a^{-1}) x a = b^{-1} a b (c a^{-1}) = x a b c = e \rangle \\ &\cong \langle a, b, c \mid c a b c a^{-1} c^{-1} b^{-1} a^{-1} = c a^{-1} c^{-1} b^{-1} = b^{-1} a b c a^{-1} = e \rangle \\ &\cong \langle a, c \mid c a c a^{-1} c^{-1} a^{-1} = c a c^{-1} a c a^{-2} = e \rangle \end{aligned}$$

(ii) $\pi_1(X_{12}, x_0)$ の可換化を求める。関係子に $a c a^{-1} c^{-1} = e$ を加えて可換化すると、関係子は $c a^{-1} = c = a c a^{-1} c^{-1} = e$ となる。すなわち、 $a = c = e$ となるので、 $(\pi_1(X_{12}, x_0) \text{ の可換化}) \cong \{e\}$ となる。

(iii) X_{12} のオイラー標数は、 $\chi(X_{12}) = 5 - 10 + 6 - 1 = 0$ である。

③正二十面体の場合

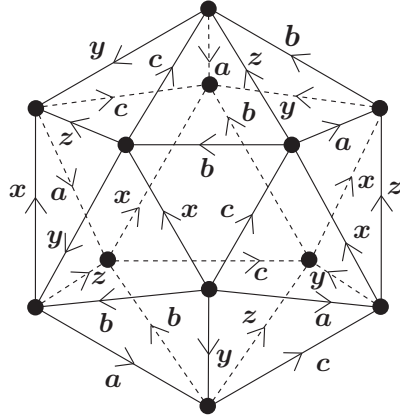


図 4.5

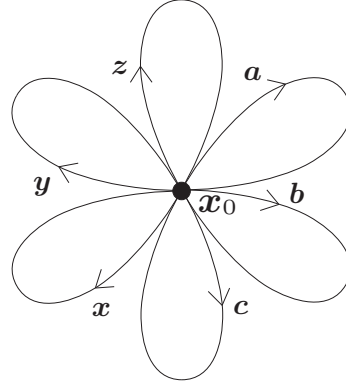


図 4.6

中身の詰まった正二十面体において、各面を向かい合う面と次のルールで同一視して得られる商空間を X_{20} と書くことにする：一方の面を重心を中心に 60 度時計回りに回転させた時に、対応する点同士を同一視する。この同一視は、図 4.5 のようになる。

(i) X_{20} の基本群を計算しよう。もちろん、 X_{20} も 3 次元セル複体である。その cell 構造は、

$$0\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}, 1\text{-cell} \cdots 6 \text{ 個}, 2\text{-cell} \cdots 10 \text{ 個}, 3\text{-cell} \cdots 1 \text{ 個}$$

となっている。 X_{20} の 1-skeleton を Y_{20} と書くことにする。 Y_{20} は図 4.6 のように、6 つの \mathbb{S}^1 の wedge sum となる。黒丸を x_0 とし、これを基点に選ぶ。Example 2.10 より、

$$\pi_1(Y_{20}, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b, c, x, y, z \mid - \rangle$$

となる。 X_{20} の 2-skeleton は、 Y_{20} に 10 個の 2-cell をそれぞれ、

$$bx^{-1}c, axc^{-1}, az^{-1}x, xz^{-1}y, xyb^{-1}, bcz^{-1}, abz^{-1}, ay^{-1}b, ac^{-1}y^{-1}, cyz^{-1}$$

に沿って境界を貼ることで得ることができる。よって、Proposition 3.2 より

$$\begin{aligned} \pi_1(X_{20}, x_0) &\cong \left\langle a, b, c, x, y, z \left| \begin{array}{l} bx^{-1}c = axc^{-1} = az^{-1}x = xz^{-1}y = xyb^{-1} = bcz^{-1} \\ = abz^{-1} = ay^{-1}b = ac^{-1}y^{-1} = cyz^{-1} = e \end{array} \right. \right\rangle \\ &\cong \left\langle a, b, c, x, y \left| \begin{array}{l} bx^{-1}c = axc^{-1} = a(cy)^{-1}x = x(cy)^{-1}y = xyb^{-1} = bc(cy)^{-1} \\ = ab(cy)^{-1} = ay^{-1}b = ac^{-1}y^{-1} = e \end{array} \right. \right\rangle \\ &\cong \left\langle a, b, c, x \left| \begin{array}{l} bx^{-1}c = axc^{-1} = a(ac^{-1})^{-1}c^{-1}x = x(ac^{-1})^{-1}c^{-1}(ac^{-1}) = x(ac^{-1})b^{-1} \\ = bc(ac^{-1})^{-1}c^{-1} = ab(ac^{-1})^{-1}c^{-1} = a(ac^{-1})^{-1}b = e \end{array} \right. \right\rangle \\ &\cong \left\langle a, b, c \left| \begin{array}{l} b(bca^{-1})^{-1}c = a(bca^{-1})c^{-1} = aca^{-1}c^{-1}(bca^{-1}) = (bca^{-1})ca^{-1}c^{-1}ac^{-1} \\ = bc^2a^{-1}c^{-1} = abca^{-1}c^{-1} = aca^{-1}b = e \end{array} \right. \right\rangle \\ &\cong \left\langle a, c \left| \begin{array}{l} ac^{-2}aca^{-1}c = a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} = aca^{-1}c^{-1}ac^{-1}a^{-1}ca^{-1} \\ = ac^{-1}a^{-1}ca^{-1}ca^{-1}c^{-1}ac^{-1} = ac^{-1}a^{-1}c^2a^{-1}c^{-1} = a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} = e \end{array} \right. \right\rangle \end{aligned}$$

となる。実は $\pi_1(X_{20}, x_0) \cong \pi_1(X_{12}, x_0)$ となる。これを示そう。

まず、 $\pi_1(X_{20}, x_0)$ の関係子を減らせるだけ減らしていく。 $\pi_1(X_{20}, x_0)$ の関係子の第 2 式と第 6 式は同じなので、第 6 式は不要。第 5 式を並び替えると、 $c^{-1}ac^{-1}a^{-1}c^2a^{-1} = e$ となり両辺の逆元を取ると、第 1 式になるので、第 5 式は不要。また、第 3 式を並び替えると第 5 式になるので、第 3 式も不

要。また、第1式を並び替え、 $aca^{-1}cac^{-2} = e$ と変形しておき、これと第2式から、 $aca^{-1}cac^{-2} = a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1}$ となる。両辺に左から a^{-1} 、右から c をかけて、 $ca^{-1}cac^{-1} = ac^{-1}a^{-1}ca^{-1}$ を得る。さらに、この両辺に右から $ca^{-1}c^{-1}ac^{-1}$ をかけると第4式になるので、第4式は不要。よって、実質必要な関係子は第1式と第2式のみである。よって

$$\pi_1(X_{20}, x_0) \cong \langle a, c \mid ac^{-2}aca^{-1}c = a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} = e \rangle$$

となる。この関係子を同値変形していくと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} ac^{-2}aca^{-1}c = e \\ a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} = e \end{cases} &\iff \begin{cases} ac^{-1}a^{-1}c^2a^{-1}c^{-1} = a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} \\ a^2c^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} = e \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c^{-1}a^{-1}c = ac^{-1}a^{-1} \\ cac^{-1}aca^{-2} = e \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} cac^{-1}c^{-1}a^{-1} = e \\ cac^{-1}aca^{-2} = e \end{cases} \end{aligned}$$

となる。最後の2式は $\pi_1(X_{12}, x_0)$ の関係子に他ならない。よって、 $\pi_1(X_{20}, x_0) \cong \pi_1(X_{12}, x_0) \cong \langle a, c \mid cac^{-1}c^{-1}a^{-1} = cac^{-1}aca^{-2} = e \rangle$ となる。

(ii) $\pi_1(X_{20}, x_0) \cong \pi_1(X_{12}, x_0)$ より、 $(\pi_1(X_{20}, x_0) \text{の可換化}) \cong (\pi_1(X_{12}, x_0) \text{の可換化}) \cong \{e\}$ となる。

(iii) X_{20} のオイラー標数は、 $\chi(X_{20}) = 1 - 6 + 10 - 1 = 4$ である。

Example 3.3. ①、②、③でそれぞれ定義した X_6, X_8, X_{12}, X_{20} が互いに同相でないことを、これまでの計算を用いて示そう。調べたことを表でまとめておくと、次のようになる：

X_i	基本群の可換化	オイラー標数
X_6	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (位数4)	0
X_8	\mathbb{Z}_3 (位数3)	0
X_{12}	$\{e\}$ (位数1)	0
X_{20}	$\{e\}$ (位数1)	4

同型な群の可換化はまた同型になることと、基本群の可換化の位数より、

$$\begin{aligned} \pi_1(X_6, x_0) &\not\cong \pi_1(X_8, x_0), \pi_1(X_6, x_0) \not\cong \pi_1(X_{12}, x_0), \pi_1(X_6, x_0) \not\cong \pi_1(X_{20}, x_0) \\ \pi_1(X_8, x_0) &\not\cong \pi_1(X_{12}, x_0), \pi_1(X_8, x_0) \not\cong \pi_1(X_{20}, x_0) \end{aligned}$$

となることが分かる。よって、Corollary 2.8より

$$X_6 \not\cong X_8, X_6 \not\cong X_{12}, X_6 \not\cong X_{20}, X_8 \not\cong X_{12}, X_8 \not\cong X_{20}$$

となる。最後に、オイラー標数が位相不変量であることから、 $X_{12} \not\cong X_{20}$ となることも分かる。よって、 X_6, X_8, X_{12}, X_{20} が互いに同相でないことが示された。

Remark 4.1 X_6, X_8, X_{12} は閉3次元多様体である。一方、 X_{20} は閉3次元多様体ではない。

まず、 X_6, X_8, X_{12} が閉3次元多様体であることを示そう。どの場合も同様に示されるので、 X_6 のみ示す。中身の詰まった正六面体(=: T とおく)はコンパクトなので、その商空間である X_6 もコンパクトである。次に、 X_6 の任意の点 $[x]$ に対して、 $\text{Int}\mathbb{D}^3$ と同相な開近傍が取れることを示す。以下、 $q: T \rightarrow X_6$ を商写像とし、 $x \in \mathbb{R}^3, r > 0$ に対し、 $U(x; r) := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - p\| < r\}$ とおく。

(1) $[x] \in q(\text{Int}T)$ のとき： $\text{Int}T$ は \mathbb{R}^3 の開集合なので、半径 r を十分小さく取ると、 $U(x; r) \subset \text{Int}T$ とできる。すると、 $[x] \in q(U(x; r))$ であって、 $q(U(x; r)) \cong \text{Int}\mathbb{D}^3$ となる。

(2) $[x] \in q(\text{Int}F_1)$ のとき (ここで、 F_1 は T のある 1 つの面を表す) : $x \in \text{Int}F_1$ とする。 $\text{Int}F_1$ は \mathbb{R}^2 の開集合なので、半径 r_1 を十分小さく取ると、 $U(x; r_1) \cap F_1 \subset \text{Int}F_1$ とできる。また、 F_1 と向かい合う面を F_2 とすると、 $[y] = [x]$ となるような $y \in \text{Int}F_2$ が存在する。同様な理由で、 r_2 を十分小さく取ると、 $U(y; r_2) \cap F_2 \subset \text{Int}F_2$ とできる。このとき、 $r := \min\{r_1, r_2\}$ 、 $U_1 := U(x; r) \cap T$ 、 $U_2 := U(y; r) \cap T$ とおくと、 $[x] \in q(U_1) \cup q(U_2)$ であって、 $q(U_1) \cup q(U_2) \cong \text{Int}\mathbb{D}^3$ となる。図 4.7 はこのことを説明した図である。

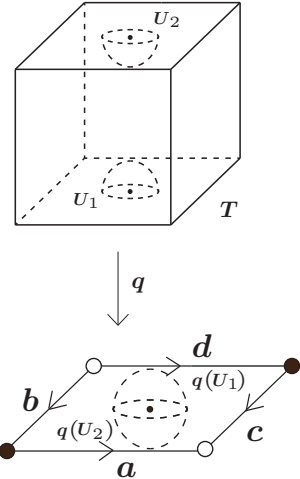


図 4.7

(3) $[x] \in q(\text{Int}E_1)$ または $[x] \in q(V_1)$ のとき (ここで、 E_1 、 V_1 はそれぞれ T のある 1 つの辺と頂点を表す) : これらは (2) の場合と同様に考えることで示される。

よって、(1), (2), (3) より、 X_6 が 3 次元多様体になることが示された。 X_6 はコンパクトゆえ、閉 3 次元多様体である。

一方、 X_{20} が閉 3 次元多様体でないことは、閉 3 次元多様体のオイラー標数は必ず 0 である (『岩波数学辞典第 4 版』の 1454 ページを参照) ことから従う。

Remark 4.2 X_6 とその基本群 Q_8 の間には、面白い関係がある。

G を群、 Y を位相空間とする。準同型写像 $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(Y)$ を Y における G の作用 (action) という。ここで、 $\text{Homeo}(Y)$ は、 Y から Y への同相写像全体の集合で、写像の合成に関して群をなす。任意の $g \in G$ に対して、 $\rho(g) : Y \rightarrow Y$ を単に、 $g : Y \rightarrow Y$ と書くことにする。 Y における G の作用が与えられている時、 G は Y に作用する (act) という。

G が Y に作用しているとき、 Y 上の関係 \sim を

$$y_1 \sim y_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \text{ s.t. } y_1 = g(y_2)$$

と定めると、これは Y 上の同値関係になる。この同値関係による商空間を、 Y/G と書き軌道空間 (orbit space) という : $Y/G = Y/\sim$.

話を戻そう。 \mathbb{R}^4 を四元数体 \mathbb{H} と見なす。すなわち、 $\mathbb{R}^4 = \{a+bi+cj+dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ とする。また、3次元球面 S^3 を、 $S^3 = \{a+bi+cj+dk \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2+c^2+d^2 = 1\}$ と見なす。このとき、 Q_8 は S^3 に左から作用する。例えば、 $i \in Q_8$ 、 $a+bi+cj+dk \in S^3$ に対して、乗法規則 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ と分配法則を使って、 $i(a+bi+cj+dk) = ai+bi^2+cij+dik = -b+ai-dj+ck$ となる。実は、この作用に対する S^3 の軌道空間について、

$$S^3/Q_8 \cong X_6$$

となる。また、 $p : S^3 \rightarrow S^3/Q_8$ を商写像とすると、これは被覆空間になる (被覆空間の定義は橋本誠吾くんの論文参照)。よって、 $f : S^3/Q_8 \rightarrow X_6$ を同相写像とすると、 $f \circ p : S^3 \rightarrow X_6$ も被覆空間となる。 S^3 は単連結なので、 X_6 の普遍被覆は S^3 であることがわかる。

Remark 4.3 X_{12} は S^3 と同相でないが、ホモロジー群が S^3 と同型な 3 次元多様体であり、ポアンカレ球面 (Poincaré sphere) として知られている ([2] を参照)。

Future Discussions

$\pi_1(X_8, x_0)$ 、 $\pi_1(X_{12}, x_0)$ 、 $\pi_1(X_{20}, x_0)$ の群の表示を求めることはできたが、それぞれどのような群になるのかはよく分からない。また、 X_8 、 X_{12} 、 X_{20} のそれぞれの普遍被覆がどのような位相空間になるのかも分からない。これらについて詳しく調べることが今後の課題である。

References

- [1] Allen Hatcher, “Algebraic Topology”, Cambridge University Press, 2001.
- [2] 田村一郎, 『トポロジー』, 岩波全書, 1972.