

# $n$ 段のメビウスのはしごの山田多項式

梶永 悠馬 (表現論研究室)

## §1. はじめに

帯を 1 回ねじって両端を張り合わせて得られる曲面はメビウスの帯と呼ばれる。



メビウスの帯

このメビウスの帯の境界だけ残して、 $n$  組のはしごをかけて得られるグラフを  $n$  段のメビウスのはしごグラフと呼ぶ。

このメビウスのはしごは化学の分野において分子グラフとして現れる ([1, 第 7 章])。

次図のようにある 2 つの分子グラフが同じ原子と結合からなっても、それらは異なる性質を持つことがある。このような分子の対のことを位相的立体異性体という。位相的立体異性体は、数学的に見ると、グラフの空間への埋め込み方への違いと捉えられる。化学では、位相的立体異性体は新しい性質を持つ物質の可能性

があるため、その合成は研究目的の 1 つである。1950 年代の終わりごろに E.Wasserman と van Gulick は独立に、ねじれたメビウスの帯のはしごを合成し、そのはしご段を破壊することで結び目や絡み目を合成するという方法を提唱した。



4 段のメビウスの  
はしごグラフ



同じ原子と結合から  
なる 2 つの分子



メビウスのはしごから自明な結び目の合成

この論文ではメビウスのはしごグラフを空間グラフとみなし、その山田多項式を計算する。ここで、山田多項式とは、Yamada [2] により導入された空間グラフに対する不変量である。この論文では、メビウスのはしごグラフに密接に関連する 3 種類の空間グラフに対して山田多項式を計算し、4 段の時のメビウスのはしごの山田多項式を計算する。

## §2. 空間グラフに関する定義

この節では、空間グラフとそれに付随する概念を [1] や Yamada [2] に基づいて説明する。

### 定義 2.1(空間グラフ)

$G$  をグラフとする。3 次元球面  $S^3$  への埋め込み  $f : G \rightarrow S^3$  を空間埋め込み (spatial embedding) といい、 $f(G)$  を空間グラフという。 $G$  の空間埋め込み全体の集合を  $SE(G)$  と表す。

定義 2.2(同値な空間グラフ)

ある空間グラフ  $f(G), g(G)$  において、 $\Phi \circ f(G) = g(G)$  となる自己同相写像  $\Phi$  が存在するとき、 $f(G), g(G)$  は **ambient isotopic** であるという。ambient isotopic な  $f(G), g(G)$  は同値な空間グラフである。

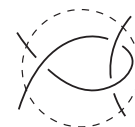
定義 2.3(正則図)

任意の空間グラフ  $f(G)$  において、 $S^3$  から  $S^3$  内の平面  $P$  への射影  $\pi: S^3 \rightarrow P$  の像  $\pi(f(G))$ 、すなわち、 $f(G)$  を平面  $P$  上に射影した図式のことを  $f(G)$  の**射影図**という。このとき、平面  $P$  に直交する方向から  $f(G)$  を見た図を  $f(G)$  の**正則図**という。ここで、グラフ  $G$  に対して、 $D_G = \{D \mid D \text{ はグラフ } G \text{ の空間埋め込みの正則図}\}$  とする。

以下では、正則図の一部のみ描かれている場合があるが、その場合外側は同一であるとする。

定義 2.4(タングル)

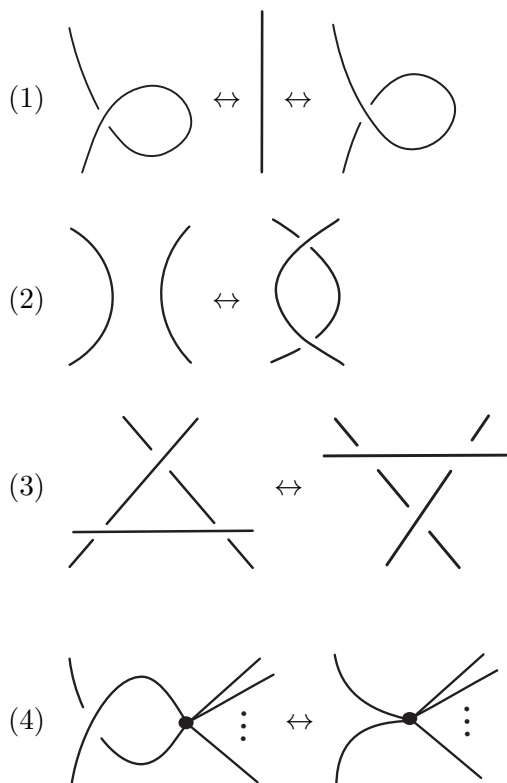
空間グラフが射影されている平面において、空間グラフの正則図が4点で交わるような円で囲まれた領域を**タングル**という。

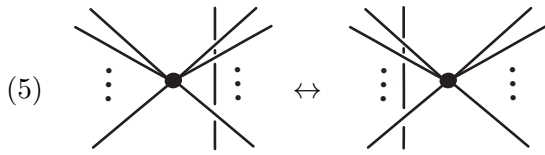


タングルの例

定義 2.5(R-moves)

空間グラフの正則図に対する次の (1)~(5) の変形を **R-moves** という。いくつかの正則図がこの変形により移り合うときはそれらは同じ空間グラフを表す。





定義 2.6(不変量)

$S$  を集合、 $v : D_G \rightarrow S$  を写像とする。 $v$  が R-moves(1)~(5) で不変であるとき、 $v$  は  $G$  の 3 次元球面  $S^3$  への埋め込みに関するグラフの **ambient isotopy 不変量** であるという。また、 $v$  が R-moves(2),(3),(5) で不変であるとき、 $v$  は **regular isotopy 不変量** であるという。

**§3. 空間グラフの山田多項式**

山田修司 [2] は空間グラフの正則図  $D$  に対して**山田多項式**と呼ばれるローラン多項式  $R(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  を定義した。

山田多項式は以下の等式によって計算される。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) &= AR\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) \\
 (2) \quad R\left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right) &= R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \vdots \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \vdots \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) \\
 (3) \quad R\left(D \cup \begin{array}{c} \text{flower} \\ \text{\small } n \text{ 個のループ} \end{array}\right) &= (-1)^{n-1}(A + 1 + A^{-1})^n R(D) \\
 (4) \quad R\left(\begin{array}{c} \boxed{D_1} \quad \boxed{D_2} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}\right) &= -R(D_1)R(D_2) \\
 (5) \quad R(\phi) &= 1
 \end{aligned}$$

ここでは、(1)~(5) を山田多項式の関係式と呼ぶことにする。

定理 3.1 (Yamada [2])

山田多項式は空間グラフの regular isotopy 不変量であり、次の等式を満たす。

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad (-A)^{-2}R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) &= R\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) = (-A)^2R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \\
 (3.2) \quad (-A)^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) &= R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (-A)R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right)
 \end{aligned}$$

**3価グラフ** (trivalent graph) とは、すべての頂点の次数が 3 であるグラフである。  
3-regular graph とも呼ばれる。

定理 3.2 (Yamada [2])

空間 3 価グラフに対して、山田多項式は  $(-A)$  の累乗倍を除いて ambient isotopy 不変量である。

$\sigma$ -ひねり数を定義することにより、山田多項式から ambient isotopy 不変量となる多項式を導き出すことができる。

定義 3.3 (道、サイクル)

単位区間  $[0, 1]$  と同相なグラフを**道** (path) といい、円  $S^1$  と同相なグラフを**サイクル** (cycle) という。またこれを**閉じた道**ともいう。

任意の  $i$  に対して  $e_i$  と  $e_{i+1}$  が 1 つの頂点を共有するような  $n$  個の異なる辺  $e_1, \dots, e_n$  からなる道を  $e_1 \cdots e_n$  と表す。

道  $w = e_1 \cdots e_n$  の長さ  $l(w)$  を  $n$  と定め、

$$\Omega_n(G) := \{w \mid w \text{ は } l(w) = n \text{ となる } G \text{ の道またはサイクル}\}$$

とおく。

定義 3.4 ( $\sigma$ -ひねり数)

写像  $\sigma : \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G) \rightarrow \mathbb{Z}$  に対して、次を満たす regular isotopy 不変量  $w : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  を  $G$  の  $\sigma$ -**ひねり数**という。

$$(3.3) \quad w\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \end{array}\right) - \sigma(e) = w\left(\begin{array}{c} e \\ | \end{array}\right) = w\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \end{array}\right) + \sigma(e)$$

$$(3.4) \quad w\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \\ e' \end{array}\right) - \sigma(e \cup e') = w\left(\begin{array}{c} e \\ \rightarrow \\ e' \end{array}\right) = w\left(\begin{array}{c} e \\ \bigcirc \\ e' \end{array}\right) + \sigma(e \cup e')$$

$$\text{ただし、 } e \cup e' = \begin{cases} e & (e = e') \\ ee' & (e \neq e') \end{cases} \text{ である。}$$

$$\tau_G : \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ を } \tau_G(w) = \begin{cases} 2 & (w \in \Omega_1(G)) \\ 1 & (w \in \Omega_2(G)) \end{cases} \text{ により定義する。}$$

$D_f$  を  $f \in SE(G)$  の正則図とし、写像  $w : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  に対して、

$$S_w(D_f) := (-A)^{-w(D_f)} R(D_f)$$

と定義する。これを**正規化山田多項式**という。

$R(D_f)$  の最小次数を  $m_R(D_f)$  とする。

補題 3.5 (Ishii [1])

- (i)  $G$  をループ (始点と終点と同じ辺) のない 3 価グラフとする。このとき、 $m_R$  は  $G$  の  $\tau_G$ -ひねり数である。
  - (ii)  $w$  を  $G$  の  $\tau_G$ -ひねり数とする。このとき、 $f \in SE(G)$  の正則図  $D_f$  に対して、 $S_w(D_f)$  は  $f$  の ambient isotopy 不変量となる。
- (i),(ii) より、 $S_{m_R}(D_f)$  は  $f$  の ambient isotopy 不変量である。

(証明)

(i) を示す。

山田多項式  $R(D_f)$  は regular isotopy 不変量だから、R-moves(2),(3),(5)のもとで不変であり、その最小次数である  $m_R(D_f)$  も同じく不変である。よって、 $m_R : D_G \rightarrow \mathbb{Z}$  は regular isotopy 不変量である。

次に、 $m_R$  が (3.3),(3.4) を満たすことを確かめる。

$R(\text{loop}), R(\text{vertical}), R(\text{crossing})$  の最小次数をそれぞれ  $m_{R1}, m_{R2}, m_{R3}$  とする。  
(3.1) より、

$$(-A)^{-2}R(\text{loop}) = R(\text{vertical}) = (-A)^2R(\text{crossing})$$

より

$$m_{R1} - 2 = m_{R2} = m_{R3} + 2$$

となる。ここで、 $e \in \Omega_1(G)$  なので、 $\tau_G(e) = 2$  である。したがって、 $m_R$  は (3.3) を満たす。

$R(\text{loop with arrow}), R(\text{vertical with arrow}), R(\text{crossing with arrow})$  の最小次数をそれぞれ  $m'_{R1}, m'_{R2}, m'_{R3}$  とする。  
同様に (3.2) より、

$$(-A)^{-1}R(\text{loop with arrow}) = R(\text{vertical with arrow}) = (-A)R(\text{crossing with arrow})$$

より

$$m'_{R1} - 1 = m'_{R2} = m'_{R3} + 1$$

となる。ここで、 $G$  はループを含まないので、 $e \neq e', ee' \notin \Omega_1(G)$  となる。よって、 $\tau_G(e) = 1$  であるので、 $m_R$  は (3.4) を満たす。したがって (i) は示された。

(ii) を示す。

(i) より、 $m_R$  は  $G$  の  $\tau_G$ -ひねり数であるので、R-moves(1),(4) に関して  $S_{m_R}(D_f)$  が不変であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} S_{m_R}(\text{loop}) &= (-A)^{-m_{R1}} R(\text{loop}) \\ &= (-A)^{-(m_{R2}+2)} R(\text{loop}) \\ &= (-A)^{-m_{R2}} (-A)^{-2} R(\text{loop}) \\ &= (-A)^{-m_{R2}} R(\text{vertical}) (= S_{m_R}(\text{vertical})) \\ &= (-A)^{-(m_{R3}+2)} R(\text{vertical}) \\ &= (-A)^{-m_{R3}} (-A)^{-2} R(\text{vertical}) \\ &= (-A)^{-m_{R3}} R(\text{crossing}) \end{aligned}$$

$$= S_{m_R} \left( \text{Diagram} \right)$$

よって、R-move(1) に関して不変である。

同様に、

$$\begin{aligned} S_{m_R} \left( \text{Diagram} \right) &= (-A)^{-m'_{R1}} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= (-A)^{-(m'_{R2}+1)} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= (-A)^{-m'_{R2}} (-A)^{-1} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= (-A)^{-m'_{R2}} R \left( \text{Diagram} \right) (= S_{m_R} R \left( \text{Diagram} \right)) \\ &= (-A)^{-(m'_{R3}+1)} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= (-A)^{-m'_{R3}} (-A)^{-1} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= (-A)^{-m'_{R3}} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= S_{m_R} \left( \text{Diagram} \right) \end{aligned}$$

よって、R-move(4) に関して不変である。 □

#### §4. 4 段のメビウスのはしごグラフの山田多項式

この節では 4 段のメビウスのはしごグラフの山田多項式を計算する。

##### 補題 4.1

任意のタングル  $D$  に対して、

$$R \left( \text{Diagram} \right) = R \left( \text{Diagram} \right)$$

(証明)

$$\begin{aligned} R \left( \text{Diagram} \right) &= A^{-2} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= A^{-2} \left( AR \left( \text{Diagram} \right) + A^{-1} R \left( \text{Diagram} \right) + R \left( \text{Diagram} \right) \right) \\ &= A^{-1} (A + 1 + A^{-1}) R \left( \text{Diagram} \right) + A^{-3} R \left( \text{Diagram} \right) \\ &\quad - A^{-2} (A + 1 + A^{-1}) R \left( \text{Diagram} \right) \\ &= R \left( \text{Diagram} \right) \end{aligned}$$

□

これ以降、 $\alpha = A + A^{-1}$  とする。

定理 4.2

$a_n = R\left(\begin{array}{c} n \\ \text{Diagram 1} \end{array}\right), b_n = R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ n \end{array}\right), c_n = R\left(\begin{array}{c} n \\ \text{Diagram 3} \end{array}\right)$  はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} a_n &= (-\alpha)^n(\alpha + 1) \\ b_n &= \alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1)(1 - \alpha)^n - 1 + (-\alpha)^n \\ c_n &= -\alpha(\alpha + 1)\left((1 - \alpha)^n - (-\alpha)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

(証明)

$$\begin{aligned} a_n &= R\left(\begin{array}{c} n \\ \text{Diagram 1} \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ n \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ n-1 \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ n-1 \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ n-1 \end{array}\right) - (\alpha + 1)R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ n-1 \end{array}\right) \\ &= -\alpha R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ n-1 \end{array}\right) \\ &= -\alpha a_{n-1} \\ &= -\alpha(-\alpha a_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= (-\alpha)^n a_0 \\ &= (-\alpha)^n R\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array}\right) \\ &= (-\alpha)^n(\alpha + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= R\left(\begin{array}{c} n \\ \text{Diagram 6} \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 7} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 8} \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 9} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 10} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 11} \end{array}\right) \\ &= R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 12} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 13} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 14} \end{array}\right) - (\alpha + 1)R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 15} \end{array}\right) \\ &= (1 - \alpha)R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 16} \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} n-1 \\ \text{Diagram 17} \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \alpha)c_{n-1} + a_{n-1} \\
&= (1 - \alpha)c_{n-1} + (-\alpha)^{n-1}(\alpha + 1) \\
&= (1 - \alpha)\left((1 - \alpha)c_{n-2} + (-\alpha)^{n-2}(\alpha + 1)\right) + (-\alpha)^{n-1}(\alpha + 1) \\
&= (1 - \alpha)^2c_{n-2} + (\alpha + 1)\left((-\alpha)^{n-2}(1 - \alpha) + (-\alpha)^{n-1}\right) \\
&\vdots \\
&= (1 - \alpha)^nc_0 + (\alpha + 1)\left((1 - \alpha)^{n-1} + (-\alpha)(1 - \alpha)^{n-2} + \cdots + (-\alpha)^{n-2}(1 - \alpha) + (-\alpha)^{n-1}\right) \\
&= (1 - \alpha)^nR\left(\text{Diagram 1}\right) + (\alpha + 1)\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{-\alpha}\right)^k \\
&= -(1 - \alpha)^n(\alpha + 1)^2 + (-\alpha)^{n-1}(\alpha + 1)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1 - \alpha}{-\alpha}\right)^k \\
&= -(1 - \alpha)^n(\alpha + 1)^2 + (-\alpha)^{n-1}(\alpha + 1)\left(\alpha + \frac{(1 - \alpha)^n}{(-\alpha)^{n-1}}\right) \\
&= -(\alpha + 1)\left((1 - \alpha)^n(\alpha + 1) + (-\alpha)^n - (1 - \alpha)^n\right) \\
&= -(\alpha + 1)\left(\alpha(1 - \alpha)^n + (-\alpha)^n\right) \\
&= -\alpha(\alpha + 1)\left((1 - \alpha)^n - (-\alpha)^{n-1}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= R\left(\text{Diagram 2}\right) \\
&= R\left(\text{Diagram 3}\right) + R\left(\text{Diagram 4}\right) \\
&= b_{n-1} + c_{n-1} \\
&= b_{n-1} - (\alpha + 1)\left(\alpha(1 - \alpha)^{n-1} + (-\alpha)^{n-1}\right) \\
&= b_{n-2} - (\alpha + 1)\left(\alpha(1 - \alpha)^{n-2} + (-\alpha)^{n-2}\right) - (\alpha + 1)\left(\alpha(1 - \alpha)^{n-1} + (-\alpha)^{n-1}\right) \\
&= b_{n-2} - (\alpha + 1)\left(\alpha(1 - \alpha)^{n-2} + \alpha(1 - \alpha)^{n-1} + (-\alpha)^{n-2} + (-\alpha)^{n-1}\right) \\
&\vdots \\
&= b_0 - (\alpha + 1)\left(\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \cdots + \alpha(1 - \alpha)^{n-2} + \alpha(1 - \alpha)^{n-1}\right) \\
&\quad + 1 + (-\alpha) + \cdots + (-\alpha)^{n-2} + (-\alpha)^{n-1} \\
&= b_0 - (\alpha + 1)\left(\alpha\sum_{k=0}^{n-1}(1 - \alpha)^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\right) \\
&= R\left(\text{Diagram 5}\right) - (\alpha + 1)\left(\alpha \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{\alpha} + \frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha}\right) \\
&= (\alpha + 1)^2 - (\alpha + 1)\left(1 - (1 - \alpha)^n + \frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha}\right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (\alpha + 1) \left( (\alpha + 1) - (1 - (1 - \alpha)^n + \frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha}) \right) \\
&= (\alpha + 1) \left( \alpha + (1 - \alpha)^n - \frac{1 - (-\alpha)^n}{1 + \alpha} \right) \\
&= \alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1)(1 - \alpha)^n - 1 + (-\alpha)^n. \quad \square
\end{aligned}$$

定理 4.2 を用いて、次が得られる。

#### 定理 4.3

4 段のはしごグラフの山田多項式は次の通りである。

$$\begin{aligned}
R\left(\text{Diagram 1}\right) &= 7A^9 - 21A^8 + 84A^7 - 162A^6 + 350A^5 - 482A^4 + 736A^3 - 805A^2 \\
&\quad + 926A - 818 + 737A^{-1} - 517A^{-2} + 351A^{-3} - 182A^{-4} + 84A^{-5} \\
&\quad - 28A^{-6} + 7A^{-7} - A^{-8} \\
S_{m_R}\left(\text{Diagram 2}\right) &= 7A^{17} - 21A^{16} + 84A^{15} - 162A^{14} + 350A^{13} - 482A^{12} + 736A^{11} \\
&\quad - 805A^{10} + 926A^9 - 818A^8 + 737A^7 - 517A^6 + 351A^5 - 182A^4 \\
&\quad + 84A^3 - 28A^2 + 7A - 1
\end{aligned}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
R\left(\text{Diagram 3}\right) &= AR\left(\text{Diagram 4}\right) + A^{-1}R\left(\text{Diagram 5}\right) + R\left(\text{Diagram 6}\right) \\
&= Aa_8 + A^{-1}b_8 + c_n \\
&= A\left((- \alpha)^8(\alpha + 1)\right) + A^{-1}\left(\alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1)(1 - \alpha)^8 - 1 + (-\alpha)^8\right) \\
&\quad + \left(-\alpha(\alpha + 1)((1 - \alpha)^8 - (-\alpha)^7)\right) \\
&= A\alpha^8(\alpha + 1) \\
&\quad + A^{-1}\alpha(\alpha + 1)(\alpha^7 - 7\alpha^6 + 27\alpha^5 - 55\alpha^4 + 69\alpha^3 - 55\alpha^2 + 27\alpha - 6) \\
&\quad - \alpha(\alpha + 1)\left((1 - \alpha)^8 - (-\alpha)^7\right) \\
&= \alpha(\alpha + 1)\left(\alpha^8 + (A + A^{-1} + 7)\alpha^7 + (-7A^{-1} - 28)\alpha^6 + (27A^{-1} + 56)\alpha^5\right. \\
&\quad \left.+ (-55A^{-1} - 70)\alpha^4 + (69A^{-1} + 56)\alpha^3 + (-55A^{-1} - 28)\alpha^2 + (27A^{-1} + 8)\alpha\right. \\
&\quad \left.+ (-6A^{-1} - 1)\right) \\
&= \alpha(\alpha + 1)\left(7\alpha^7 + (-7A^{-1} - 28)\alpha^6 + (27A^{-1} + 56)\alpha^5 + (-55A^{-1} - 70)\alpha^4\right. \\
&\quad \left.+ (69A^{-1} + 56)\alpha^3 + (-55A^{-1} - 28)\alpha^2 + (27A^{-1} + 8)\alpha + (-6A^{-1} - 1)\right) \\
&= 7\alpha^9 + (-7A^{-1} - 21)\alpha^8 + (20A^{-1} + 28)\alpha^7 + (-28A^{-1} - 14)\alpha^6 + (14A^{-1} - 14)\alpha^5 \\
&\quad + (14A^{-1} + 28)\alpha^4 + (-28A^{-1} - 20)\alpha^3 + (21A^{-1} + 7)\alpha^2 + (-6A^{-1} - 1)\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7(A^9 + 9A^7 + 36A^5 + 84A^3 + 126A + 126A^{-1} + 84A^{-3} + 36A^{-5} + 9A^{-7} + A^{-9}) \\
&\quad + (-7A^{-1} - 21)(A^8 + 8A^6 + 28A^4 + 56A^2 + 70 + 56A^{-2} + 28A^{-4} + 8A^{-6} + A^{-8}) \\
&\quad + (20A^{-1} + 28)(A^7 + 7A^5 + 21A^3 + 35A + 35A^{-1} + 21A^{-3} + 7A^{-5} + A^{-7}) \\
&\quad + (-28A^{-1} - 14)(A^6 + 6A^4 + 15A^2 + 20 + 15A^{-2} + 6A^{-4} + A^{-6}) \\
&\quad + (14A^{-1} - 14)(A^5 + 5A^3 + 10A + 10A^{-1} + 5A^{-3} + A^{-5}) \\
&\quad + (14A^{-1} + 28)(A^4 + 4A^2 + 6 + 4A^{-2} + A^{-4}) \\
&\quad + (-28A^{-1} - 20)(A^3 + 3A + 3A^{-1} + A^{-3}) \\
&\quad + (21A^{-1} + 7)(A^2 + 2 + A^{-2}) \\
&\quad + (-6A^{-1} - 1)(A + A^{-1}) \\
&= 7A^9 - 21A^8 + 84A^7 - 162A^6 + 350A^5 - 482A^4 + 736A^3 - 805A^2 + 926A \\
&\quad - 818 + 737A^{-1} - 517A^{-2} + 351A^{-3} - 182A^{-4} + 84A^{-5} - 28A^{-6} + 7A^{-7} - A^{-8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{m_R} \left( \text{Diagram} \right) &= (-A)^{-m_R} R \left( \text{Diagram} \right) \\
&= (-A)^8 (7A^9 - 21A^8 + 84A^7 - 162A^6 + 350A^5 - 482A^4 + 736A^3 \\
&\quad - 805A^2 + 926A - 818 + 737A^{-1} - 517A^{-2} + 351A^{-3} - 182A^{-4} \\
&\quad + 84A^{-5} - 28A^{-6} + 7A^{-7} - A^{-8}) \\
&= 7A^{17} - 21A^{16} + 84A^{15} - 162A^{14} + 350A^{13} - 482A^{12} + 736A^{11} \\
&\quad - 805A^{10} + 926A^9 - 818A^8 + 737A^7 - 517A^6 + 351A^5 - 182A^4 \\
&\quad + 84A^3 - 28A^2 + 7A - 1 \quad \square
\end{aligned}$$

以上より、4段のメビウスのはしごの多項式において、関係式(1)により導き出される空間グラフはどれも  $\alpha$  に関する数式として表すことができた。同様に、 $n$  段のメビウスのはしごの多項式も数式として表すことができる。

### 参考文献

- [1] C. アダムス, 金信泰造, 『結び目の数学』, 丸善出版, 2021 年
- [2] A.Ishii, “On normalizations of a regular isotopy invariant for spatial graphs”, *International Journal of Mathematics* **22** (2011), 1545-1559.
- [3] S.Yamada, “An invariant of spatial graphs”, *J. Graph Theory* **13** (1989), 537-551.