

# 交点数が 7 以下の結び目の ホワイトヘッドダブルの彩色可能性

多計 和子 (表現論研究室)

## §1. はじめに

日常生活において「結ぶ」動作を行うことはよくある。例えば、ある 1 本の紐を好きなように結び、その紐の両端を結ぶ。絡まったネックレスのつなぎ目の部分をつなぎ合わせた状態がイメージとして近い。

数学においては、結び目を自己交差のない閉じた曲線と考え、2 つの結び目が連続変形で移り合うのか、移り合わないのか、結び目がほどけるのか、ほどけないのかを研究する。

結び目を研究するために、それを平面上に図示して考察する。紐同士が重なった部分は、上に重なった部分だけを描く。できた図は、切れ目のある曲線でできている。これを結び目の射影図という。図 1.1 のように射影図の各曲線に色をつける。ある条件のもとで、曲線が少なくとも何色で塗り分けられるかということが、この論文の主題である。結び目を  $p$  色に塗り分けられることができることを、 $p$  彩色可能という。ただし、実際に  $p$  色すべてを使って塗り分けるという意味ではない (正確には §4 を参照)。また、結び目が  $p$  彩色可能となるような最小の値を彩色数という。彩色数についてはこれまでに多くの研究結果がある。特別研究で読んだ村上斉先生の本 [1] で、彩色数について学び本研究を行うきっかけとなった。

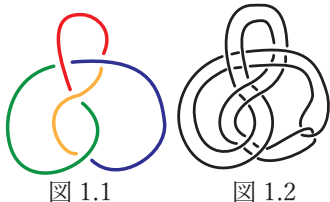


図 1.1

図 1.2

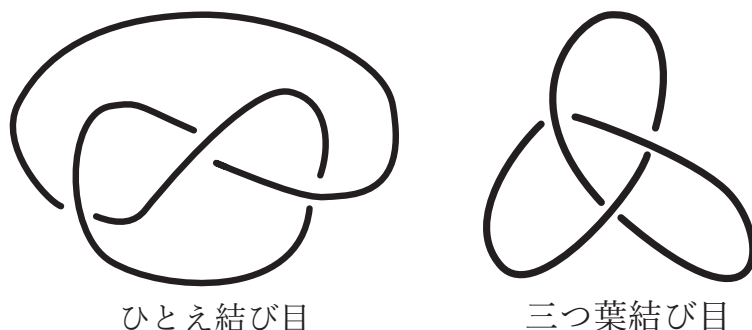
本研究では結び目のホワイトヘッドダブルを考える。ホワイトヘッドダブルとは、図 1.1 から図 1.2 のように結び目を二重にし、一部を絡み合わせて作られる結び目のことをいう。ホワイトヘッドダブルの彩色数については、藤井 [3] により、三葉結び目と 8 の字結び目に対して求められている。

この論文では、交点の数が 5, 6, 7 個のホワイトヘッドダブルの最小彩色数を調べる。その結果、最小彩色数は 3, 7, 11, 13, 19, 29 のいずれかであるということが分かった。

## §2. 結び目とは

3 次元空間に埋め込まれた円周で、自分自身と交わらないものを**結び目**とよぶ。

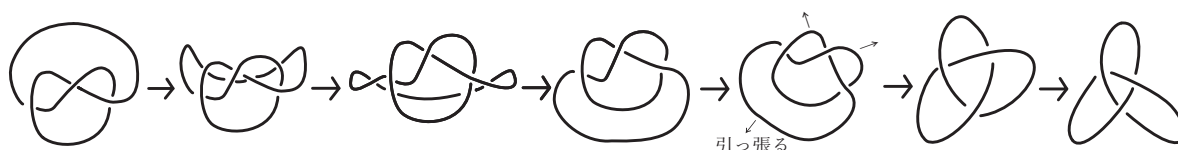
下図は結び目の例である.



このように, 結び目は両端のあるひもではなく, 両端をつなげて輪にしたものである.

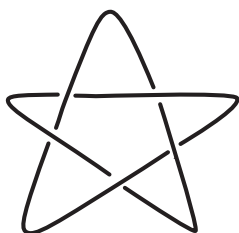
結び目の中には, 空間の中でどのように動かしてもきれいな円周にできないような結び目 (**ほどけない結び目**) ときれいな円周にできる結び目 (**自明な結び目**) がある.

2 つの結び目は, 空間内でどちらか一方の結び目を, 結び目を切らないように動かして, もう片方の結び目に変形できるとき, **同値**であるという. 例えば, ひとえ結び目は次のように変形をして三つ葉結び目に変形していくことができるので, 三つ葉結び目と同値になることが分かる.



同値変形で変わらない性質のことを**不変量**という.

### §3. 同値な結び目の射影図による言い換え



空間内の結び目を平面上で表したものを, **結び目の射影図**という. 重なった部分 (交点) は上下をつけることで平面上に表す.

同じ結び目の射影図でも様々な射影図で表すことができるが, その中で交点の個数が最小のものを**最小交点数**, あるいは**交点数**という.

左図は射影図の例である.

結び目の同値変形は, 射影図に対する変形に言い換えることができ, 次の2つの変形方法に分類できる.

#### ①平面上の同値変形

交点を持った閉じた曲線が細いゴムひもでできていると考える.

そのようなひもを平面の上に乗せたまま伸縮自在に動かすことを**平面上の同値変形**と定める. そのとき, ひも同士は, すでに交わっている部分以外は交わらないようにする.

#### ②空間内での同値変形

射影図が平面上で同値でなくても結び目は同値なことがある.

そこで、空間内での同値変形に注目すると、下図のようなある一定のパターンがあることがわかる。



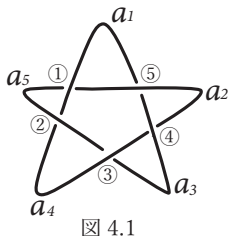
上図の変形は射影図の一部分を抜き出したものである。矢印の右から左、左から右へ置き換える操作を、左から順に、**ライデマイスター移動 I, II, III** と呼ぶ。

#### §4. 結び目の彩色方程式

結び目の射影図において、交点の下側から始まり、途中は上のみを通り、交点の下側で終わる部分のことを**弧**という。各弧に整数を割り当てて、結び目の彩色数が次のように定義される。

**定義 4.1**  $p$  を正の整数とする。結び目  $K$  の射影図の各弧に  $0, 1, \dots, p-1$  のいずれかの値を、次の条件を満たすよう割り当てることができるとき、 $K$  は  $p$  **彩色可能** という。

- ① 少なくとも 2 つの値が用いられる。
- ② すべての交点において  $2a_k - a_i - a_j \equiv 0 \pmod{p}$  (この式を**彩色方程式**という) を満たす。結び目  $K$  が  $p$  彩色可能となるような最小の  $p$  を**彩色数**という。



例えば、左の射影図の場合、 $a_1 \dots a_5$  を各弧に割り当てられた整数とするとき、各交点での彩色方程式は次のようになる。

- ①  $2a_1 - a_2 + a_5 \equiv 0 \pmod{p}$
- ②  $2a_5 - a_1 + a_4 \equiv 0 \pmod{p}$
- ③  $2a_4 - a_3 + a_5 \equiv 0 \pmod{p}$
- ④  $2a_3 - a_2 + a_4 \equiv 0 \pmod{p}$
- ⑤  $2a_2 - a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod{p}$

$p$  彩色可能であることは結び目の不変量になる。すなわち、次が成り立つ。

**定理 4.2** 彩色数は、結び目の不変量となる。

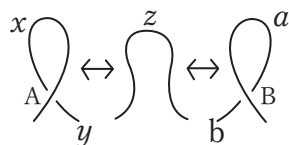
(証明)

[1] の第 6 章の証明を参考に証明する。

① 平面上の同値変形での不変性

交点と弧は同値変形によって 1 対 1 に対応するから、平面上の同値変形によって彩色数は変わらない。

②ライデマイスター移動 I での不変性



交点 A, B におけるそれぞれの彩色方程式は次のようになる.

$$A: 2x \equiv x + y \pmod{p} \dots (1)$$

$$B: 2a \equiv a + b \pmod{p} \dots (2)$$

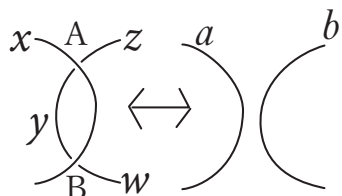
(1) の両辺から  $x$  を引くと,  $x \equiv y \pmod{p}$  となる.

同様に (2) の両辺から  $a$  を引くと,  $a \equiv b \pmod{p}$  となる.

つまり, 新たな交点ができて, 弧は同じ色で塗り分けることができる.

ここで,  $x = a = z$  ととることにより, 弧の変数に 1 対 1 の対応がつくことになり, ライデマイスター移動 I を行う前に少なくとも 2 つの値が使われていれば, 行った後も少なくとも 2 つの値が使われている. よって, 結び目においてライデマイスター移動 I を行う前と後では彩色数は変わらない.

③ライデマイスター移動 II での不変性



交点 A, B における彩色方程式はそれぞれ

$$A: 2x \equiv y + z \pmod{p} \dots (3)$$

$$B: 2x \equiv y + w \pmod{p} \dots (4)$$

となる.

(3) - (4) を計算すると,

$$0 \equiv z - w \pmod{p} \dots (3)$$

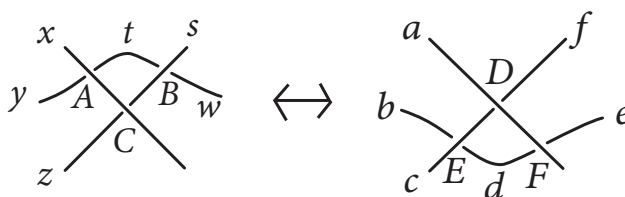
つまり,  $w \equiv z \pmod{p}$  がわかる. また, (3) の両辺から  $z$  を引くことにより

$$y \equiv 2x - z \pmod{p}$$

となるから,  $y$  と  $w$  は  $x, z$  を決めれば自動的に決まる.

以上のことから,  $x = a, z = b$  ととることにより, 弧の変数に 1 対 1 の対応がつくことになり, ライデマイスター移動 II を行う前に少なくとも 2 つの値が使われていれば, 行った後も少なくとも 2 つの値が使われている. よって, 結び目においてライデマイスター移動 II を行う前と後では彩色数は変わらない.

④ライデマイスター移動 III での不変性



交点 A, B, C に対して彩色方程式はそれぞれ

$$A : 2x - y - t \equiv 0 \pmod{p} \dots (4)$$

$$B : 2s - t - w \equiv 0 \pmod{p} \dots (5)$$

$$C : 2x - s - z \equiv 0 \pmod{p} \dots (6)$$

同様に, 右図の D, E, F の交点に対しても彩色方程式を立てる.

$$D : 2a - c - f \equiv 0 \pmod{p} \dots (7)$$

$$E : 2c - b - d \equiv 0 \pmod{p} \dots (8)$$

$$F : 2a - d - e \equiv 0 \pmod{p} \dots (9)$$

(4), (6) から,

$$t \equiv 2x - y \pmod{p}$$

$$s \equiv 2x - z \pmod{p}$$

となる. これらを (5) に代入して整理すると,

$$w \equiv 2x + y - 2z \pmod{p}$$

となる. よって,  $s, t, w$  は  $x, y, z$  によって決まる.

同じように (7), (8), (9) も整理していく. (7), (8) より,

$$f \equiv 2a - c \pmod{p}$$

$$t \equiv 2x - y \pmod{p}$$

となる. (9) に  $t \equiv 2x - y \pmod{p}$  を代入して整理すると,

$$e \equiv 2a + b - 2c \pmod{p}$$

よって,  $d, e, f$  は  $a, b, c$  により決まる.

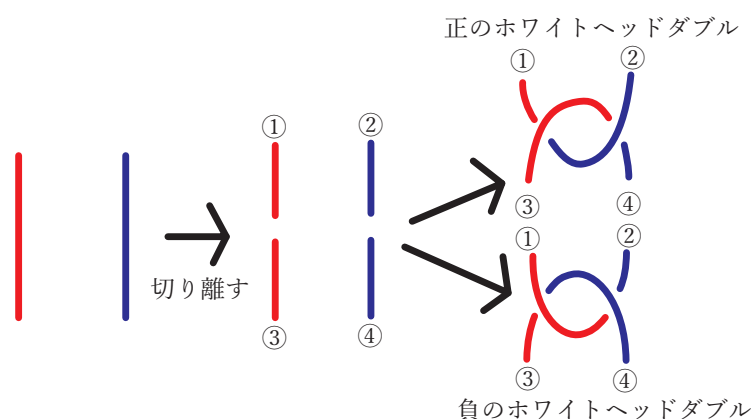
以上のことから,  $x = a, y = b, z = c$  ととることにより, 弧の変数に 1 対 1 の対応がつくことになり, ライデマイスター移動 III を行う前に少なくとも 2 つの値が使われていれば, 行った後も少なくとも 2 つの値が使われている. よって, 結び目においてライデマイスター移動 III を行う前と後では彩色数は変わらない.

以上のことから, 平面上の同値変形とライデマイスター移動によって彩色数が変化しないことが分かる. つまり, 彩色数が結び目の不変量となることが示せた. (証明終)

## §5. 結び目のホワイトヘッドダブル

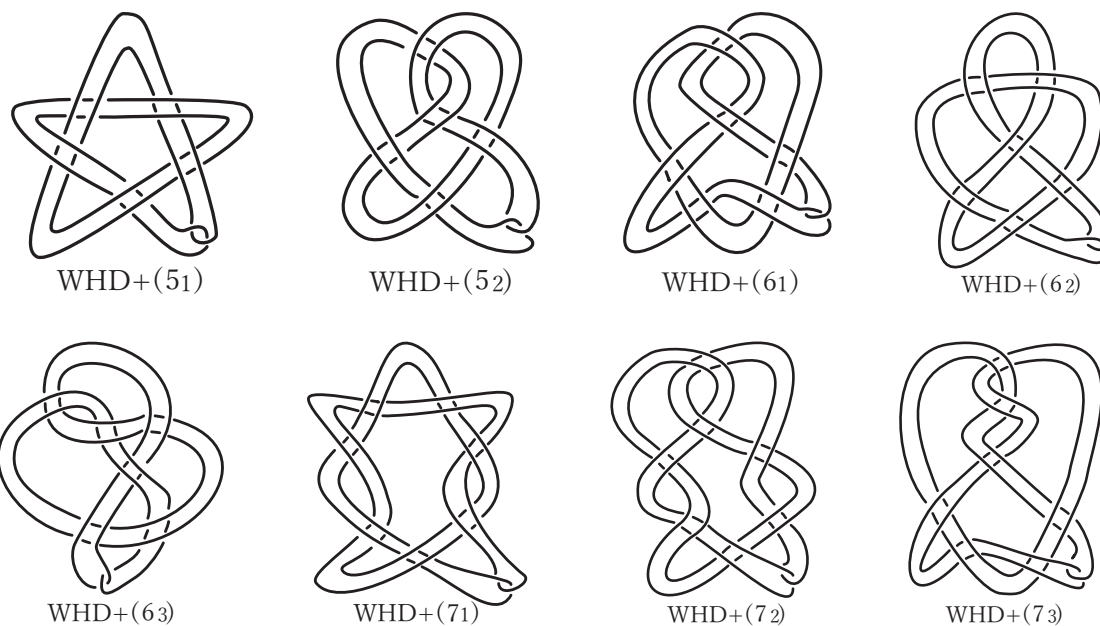
**定義 5.1** 結び目  $K$  のホワイトヘッドダブルとは結び目を二重にし, 下図のように絡めることのできる結び目のことをいう. 下図は結び目の一部を切り抜いたものである.

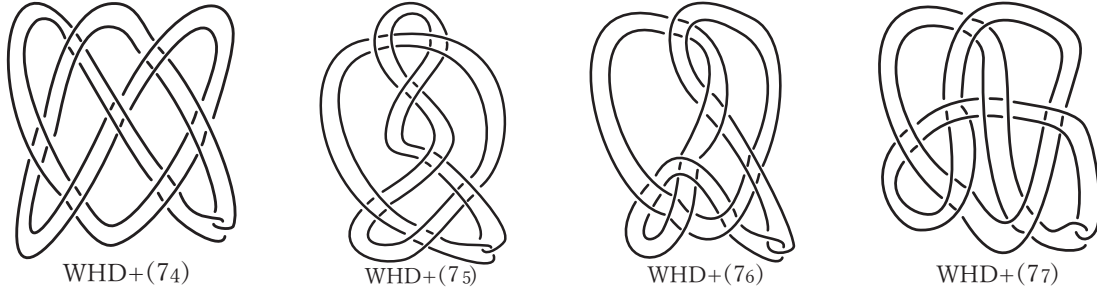
絡め方により, ホワイトヘッドダブルには正のホワイトヘッドダブルと負のホワイトヘッドダブルの二種類が存在する. 正の方を  $\text{WHD}_+(K)$ , 負の方を  $\text{WHD}_-(K)$  で表す.



正のホワイトヘッドダブルは②と③が, 負のホワイトヘッドダブルは①と④がそれぞれ上に重なるように絡める.

下図は交点数が 5, 6, 7 の結び目を正のホワイトヘッドダブルにしたもののリストである.





## §6. 交点数が7以下の結び目のホワイトヘッドダブルの彩色可能性

藤井 [3] の研究により, 三つ葉結び目と8の字結び目のホワイトヘッドダブルの彩色数が計算されている. この論文では, 交点数が5,6,7の結び目のホワイトヘッドダブルの彩色数を求める.

彩色数は, 彩色方程式から作られる行列式を用いて計算できることが知られている.

例えば §4 の図 4.1 の彩色方程式の場合, 1 行目は, 交点①における彩色方程式

$2a_1 - a_2 + a_5 \equiv 0 \pmod{p}$  から,  $(2 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1)$  となる. 2 行目以降も同様に, 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ が得られる. このように構成された行列式のある 1 行とある 1 行を}$$

削った小行列の行列式のことを, **彩色行列式**といい,  $\det(K)$  と表す. これに関して, 次の定理が知られている.

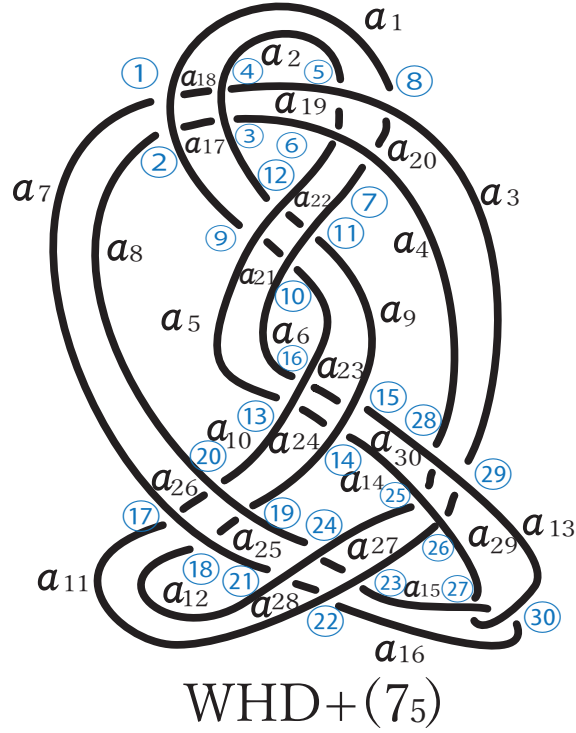
**定理 6.1** 結び目  $K$  は,  $\gcd(\det(K), p) > 1$  のとき,  $p$  彩色可能である.

さらに, 結び目  $K$  の彩色行列式と  $p$  が共通の素因数  $q$  をもつとき, 結び目  $K$  は  $q$  彩色可能である. よって, 結び目  $K$  の最小彩色可能性は 1 または素数である.

定理の証明は, [2] の Theorem 3.11 と [4] を参照してほしい.

$5_1$  から  $7_7$  までの結び目のホワイトヘッドダブルの彩色数を, 定理 6.1 を用いて計算する.

計算においては, 数式処理ソフトウェアの Maple(2020) を用いた.  $7_5$  の正のホワイトヘッドダブルの彩色数の求め方を説明する.



各交点における彩色方程式は次のようになる. 以下, すべて  $p$  を法とした合同式である.

|                                        |                                        |                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| ① $2a_1 - a_7 - a_{18} \equiv 0$       | ② $2a_1 - a_8 - a_{17} \equiv 0$       | ③ $2a_2 - a_4 - a_{17} \equiv 0$       |
| ④ $2a_2 - a_3 - a_{18} \equiv 0$       | ⑤ $2a_3 - a_2 - a_{19} \equiv 0$       | ⑥ $2a_4 - a_5 - a_{19} \equiv 0$       |
| ⑦ $2a_4 - a_6 - a_{20} \equiv 0$       | ⑧ $2a_3 - a_1 - a_{20} \equiv 0$       | ⑨ $2a_5 - a_1 - a_{21} \equiv 0$       |
| ⑩ $2a_6 - a_{10} - a_{21} \equiv 0$    | ⑪ $2a_6 - a_9 - a_{22} \equiv 0$       | ⑫ $2a_5 - a_2 - a_{22} \equiv 0$       |
| ⑬ $2a_{10} - a_5 - a_{24} \equiv 0$    | ⑭ $2a_9 - a_{14} - a_{24} \equiv 0$    | ⑮ $2a_9 - a_{13} - a_{23} \equiv 0$    |
| ⑯ $2a_{10} - a_6 - a_{23} \equiv 0$    | ⑰ $2a_7 - a_{11} - a_{26} \equiv 0$    | ⑱ $2a_7 - a_{12} - a_{25} \equiv 0$    |
| ⑲ $2a_8 - a_9 - a_{25} \equiv 0$       | ⑳ $2a_8 - a_{10} - a_{26} \equiv 0$    | ㉑ $2a_{12} - a_7 - a_{28} \equiv 0$    |
| ㉒ $2a_{11} - a_{16} - a_{28} \equiv 0$ | ㉓ $2a_{11} - a_{15} - a_{27} \equiv 0$ | ㉔ $2a_{12} - a_8 - a_{27} \equiv 0$    |
| ㉕ $2a_{14} - a_{12} - a_{30} \equiv 0$ | ㉖ $2a_{14} - a_{11} - a_{29} \equiv 0$ | ㉗ $2a_{13} - a_3 - a_{29} \equiv 0$    |
| ㉘ $2a_{13} - a_4 - a_{30} \equiv 0$    | ㉙ $2a_{14} - a_{15} - a_{16} \equiv 0$ | ㉚ $2a_{16} - a_{13} - a_{14} \equiv 0$ |

この 30 個の彩色方程式を Maple のコードに当てはめていく. 以下が計算に用いたコードである.

Listing 1 Maple での彩色数の求め方 ( $7_5$  の場合)

```

1 with(LinearAlgebra);
2 interface(rtablesize = infinity);
3 A := Matrix(30, 30, 0);
4 rows := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
           17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30];

```



```

5 columns_minus1 := [[7, 18], [8, 17], [4, 17], [3, 18], [2, 19],
    [5, 19], [6, 20], [1, 20], [1, 21], [10, 21], [9, 22], [2,
    22], [5, 24], [14, 24], [13, 23], [6, 23], [11, 26], [12,
    25], [9, 25], [10, 26], [7, 28], [15, 27], [8, 27], [12, 30],
    [11, 29], [3, 29], [4, 30], [13, 14], [15, 16]];
6 columns_2 := [[1], [1], [2], [2], [3], [4], [4], [3], [5], [6],
    [6], [5], [10], [9], [9], [10], [7], [7], [8], [8], [12],
    [11], [11], [12], [14], [14], [13], [13], [15], [13]];
7 for i to nops(rows) do
8     for j to nops(columns_minus1[i]) do
9 A[rows[i], columns_minus1[i][j]] := -1;
10 end do;
11     for j to nops(columns_2[i]) do
12         A[rows[i], columns_2[i][j]] := 2;
13     end do;
14 end do;
15 rows := RowDimension(A);
16 cols := ColumnDimension(A);
17 all_minors := Matrix(rows, cols);
18 print(A);
19 for i to rows do
20 for j to cols do
21 all_minors[i, j] := Minor(A, i, j);
22 end do;
23 end do;
24 all_minors;
25 b := Vector(30, 0):
26 solution := Linsolve(A, b) mod 27;
27 subs({_t[29]=0, _t[30]=1}, solution);

```

上記のコードの3行目に30と入力するのは、交点は30個あるので、 $30 \times 30$ 行列の行列式を作成したいからであり、4行目に1~30までの数字を順番に入力する。

5行目に、彩色方程式の係数が-1となる弧を、①の交点から⑩まで、順番に書き出す。

同様に、6行目には彩色方程式の係数が2となる弧を順番に書き出す。

その後、17行目で $30 \times 30$ の行列式の小行列式を計算し、出力された行列式の成分はすべて27または-27となる。 $27 = 3^3$ であるから、定理6.1より、結び目が3彩色可能かを調べる。26行目の

合同式は,  $p$  彩色可能のときの解の 1 つを計算する. このとき, 27 行目で, 2 つの弧 ( $a_{29}$  と  $a_{30}$ ) の彩色を 0,1 とそれぞれ定める. mod の後ろに 3 を代入すると, 解が出る. よって,  $\text{WHD}_+(7_5)$  の最小彩色数は 3 となる.

$p = 3$  のときの 1 つの解として, 次を得る.

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}) = (2, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1)$$

同じように他のホワイトヘッドダブルを計算して, 次の一覧表を得る.

| 結び目 $K$                    | $5_1$ | $5_2$ | $6_1$ | $6_2$ | $6_3$ | $7_1$ | $7_2$ | $7_3$ | $7_4$ | $7_5$ | $7_6$ | $7_7$ |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $K$ の彩色行列式の値               | 5     | 7     | 7     | 11    | 13    | 7     | 11    | 13    | 15    | 17    | 19    | 21    |
| $K$ の最小彩色数                 | 5     | 7     | 7     | 11    | 13    | 7     | 11    | 13    | 3     | 17    | 19    | 3     |
| $\text{WHD}_+(K)$ の彩色行列式の値 | 19    | 21    | 7     | 7     | 1     | 27    | 27    | 29    | 29    | 27    | 11    | 3     |
| $\text{WHD}_+(K)$ の最小彩色数   | 19    | 3     | 7     | 7     | 1     | 3     | 3     | 29    | 29    | 3     | 11    | 3     |
| $\text{WHD}_-(K)$ の彩色行列式の値 | 21    | 19    | 9     | 9     | 1     | 29    | 29    | 27    | 27    | 29    | 13    | 3     |
| $\text{WHD}_-(K)$ の最小彩色数   | 3     | 19    | 3     | 3     | 1     | 29    | 29    | 3     | 3     | 29    | 13    | 3     |

表から以下のことが分かる.

- $\text{WHD}_+(K)$  と,  $\text{WHD}_-(K)$  の最小彩色数が同じである  $K$  は,  $6_3, 7_7$  である.
- 最小彩色数は, 1 または奇数の素数である.
- $\text{WHD}_\pm(6_3)$  の彩色数が 1 となり, mod 計算で解なしとなった.
- $6_3$  と  $7_7$  以外は, 同じ結び目の種類でも, 正と負で WHD が異なるので, 同値でない. 例えば,  $\text{WHD}_+(7_3)$  と  $\text{WHD}_-(7_3)$   $\text{WHD}_+(7_4)$  と  $\text{WHD}_-(7_4)$   $\text{WHD}_+(7_5)$  と  $\text{WHD}_-(7_5)$  である.
- $\text{WHD}_+(5_1)$ ,  $\text{WHD}_-(5_1)$ ,  $\text{WHD}_+(6_1)$ ,  $\text{WHD}_-(6_1)$ ,  $\text{WHD}_+(6_3)$ ,  $\text{WHD}_+(7_1)$ ,  $\text{WHD}_-(7_1)$ ,  $\text{WHD}_+(7_6)$ ,  $\text{WHD}_-(7_6)$ ,  $\text{WHD}_+(7_7)$  は互いに同値でない.
- $\text{WHD}_+(5_2)$ ,  $\text{WHD}_-(5_2)$ ,  $\text{WHD}_+(6_2)$ ,  $\text{WHD}_-(6_2)$ ,  $\text{WHD}_+(7_2)$ ,  $\text{WHD}_-(7_2)$ ,  $\text{WHD}_+(7_6)$ ,  $\text{WHD}_-(7_6)$ ,  $\text{WHD}_-(7_7)$  は互いに同値でない.

## 参考文献

- [1] 村上斉「結び目のはなし」[新装版], 日本評論社, (2022).
- [2] Richard Hepworth, "MX4540: Knots", [https://homepages.abdn.ac.uk/r.hepworth/pages/files/knots\\_Notes.pdf](https://homepages.abdn.ac.uk/r.hepworth/pages/files/knots_Notes.pdf).
- [3] 藤井怜南「三葉結び目と 8 の字結び目のホワイトヘッドダブルの彩色数」, 2022 年度関西大学数学科特別研究報告集.
- [4] Sandy Ganzell and Caroline VanBlargan, Knots with composite colors, College Math.J. **55** (2024), 205-209.