# 連分数による 120 度のピタゴラス数の漸化式

寺本遼太郎 (表現論研究室)

## 1. はじめに

特別研究では、小林吹代著「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」を読んで、ピタゴラスの定理からなるピタゴラス数や 120 度のピタゴラス数について深く研究した。ピタゴラス数が与えられると、それにある変換を施すことで新しいピタゴラス数を生み出すことができる。次々とピタゴラス数を生み出すことにより、ある連分数が得られる。この論文では、連分数とピタゴラス数との関係を調べる。

前半ではピタゴラス数や 120 度のピタゴラス数について説明し、後半からは実際に連分数での表示やそれぞれの系列を式で示す。

## 2. ピタゴラス数

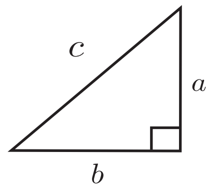
ここでは [1] の第 1 章に基づいてピタゴラス数を説明する。

**ピタゴラス数**とは、右下図のような直角三角形の 3 辺となる互いに素な自然数の組 $(a, b, c)$ のことである。ピタゴラスの定理により $a^2 + b^2 = c^2$ が成立する。

全てのピタゴラス数 $(a, b, c)$ は, 次の行列 $P$ を使うことで求められる。

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

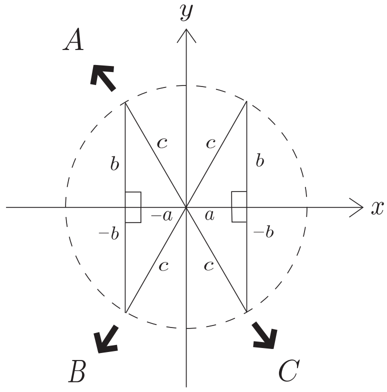
この行列 $P$ を**ピタゴラス行列**と呼ぶ。




**補題 2.1.** $(a, b, c)$ がピタゴラス数のとき、

$$P\begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} a \\ -b \\ c \end{pmatrix} \text{ はピタゴラス数である。}$$

補題において $(a, b, c)$ を**親ピタゴラス数**と呼び、補題でできたピタゴラス数を**子ピタゴラス数**と呼ぶ。3 組のピタゴラス数を生み出すために、一度それぞれ $(-a, b, c), (-a, -b, c), (a, -b, c)$ を作り出す。これは下図のような座標平面で考えると分かりやすい。この時、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限にある直角三角形をそれぞれ $A, B, C$ とおく。




行列 $P$ を親ピタゴラス数 $(a, b, c)$ から子ピタゴラス数を作る変換と考えるとき、これを**ピタゴラス変換**という。この時ピタゴラス数の親子関係は次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \text{子} & \\
\text{親} & (-a,b,c) \arrow[r, "P"] & P(-a,b,c) & \text{(A)} \\
(a,b,c) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (-a,-b,c) \arrow[r, "P"] & P(-a,-b,c) & \text{(B)} \\
 & (a,-b,c) \arrow[r, "P"] & P(a,-b,c) & \text{(C)}
\end{tikzcd}$$

$(a,b,c)$ から一度 $(-a,b,c)$ などを作ってからではなく、親ピタゴラス数から直接子ピタゴラス数を求めることができる。その場合の変換は次のようになる ([1] p.19 参照)。

**定義 2.2.** ピタゴラス行列 ($A,B,C$ で分けた場合)

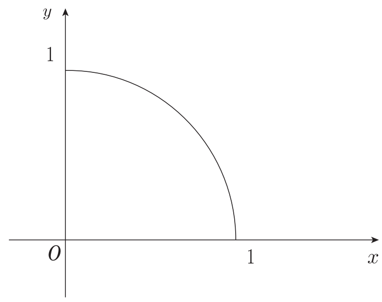
$$A\cdots P=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}\qquad B\cdots P=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}\qquad C\cdots P=\begin{pmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

親ピタゴラス数が存在しないピタゴラス数を**祖先**という。ピタゴラス数において祖先は $(3,4,5)$ のみである。

ピタゴラス数を座標平面やパラメータ上で表すことができる。最初に座標平面で示すために、$x=\dfrac{a}{c}$、$y=\dfrac{b}{c}$ とおくと、$(x,y)$ は $x^2+y^2=1$ $(x>0, y>0)$ の円上の点である。

ここで $(a,b,c)$ のピタゴラス変換に当て嵌めると、次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \text{子} & \\
\text{親} & (-x,y) \arrow[r, "P"] & P(-x,y) & (A) \\
(x,y) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (-x,-y) \arrow[r, "P"] & P(-x,-y) & (B) \\
 & (x,-y) \arrow[r, "P"] & P(x,-y) & (C)
\end{tikzcd}$$




パラメータ $m,n$ を導入してピタゴラス数を表すことができる。先程の $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$ に対して円上の点 $(x,y)$ と $(-1,0)$ を結ぶ直線と $y$ 軸との交点の $y$ 座標を $t$ とおく。この時 $t$ は有理数である。

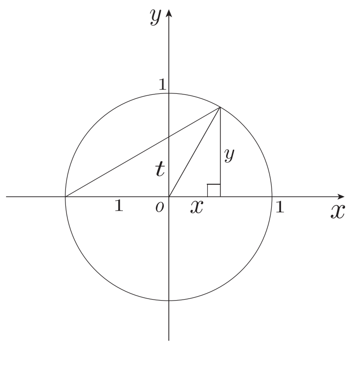
$x,y$ をそれぞれ $t$ で表すために、次の連立方程式を解く。

$$\begin{cases}x^2+y^2=1 & \text{(円の方程式)}\\ y=t(x+1)=tx+t & \text{(直線の方程式と図形の相似より、}\frac{y}{1+x}=\frac{t}{1}\text{)}\end{cases}$$

これを解くと、$x=-1, \frac{1-t^2}{1+t^2}$ より、$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ のとき、$y=\frac{2t}{1+t^2}$ となる。

ここで図より $0<t<1$ であり、さらに $t=\frac{n}{m}$ としておくことで、

$$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\\[2ex] y=\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}\end{cases}$$




となり、次が成り立つ (証明は [1] の p.51〜52 を参照)。

**定理 2.3.** [ピタゴラス数の公式] $t = \frac{n}{m}$ のとき、

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

(ただし、$m, n \in \mathbb{N}$ , $m > n$ , $m, n$ はどちらかそれぞれ偶数、奇数であり互いに素)

親ピタゴラス数と子ピタゴラス数のパラメータの間には次の関係が成り立つ。

**補題 2.4.** (1) 親ピタゴラス数のパラメータを $(m, n)$、子ピタゴラス数のパラメータを $(m', n')$ とすると、

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m' = m - 2n \\ n' = -n \end{cases}$$

が成立する。

(2) 親ピタゴラス数のパラメータを $t$、子ピタゴラス数のパラメータを $t'$ とおく。このとき $t = \frac{n}{m}, t' = \frac{n'}{m'}$ であり、

$$t' = \frac{n'}{m'} = \frac{-n}{m - 2n} = \frac{1}{2 - \frac{1}{t}}.$$

また親ピタゴラス数から A,B,C への移し替えについて、

$$\mathrm{A} \cdots \frac{1}{t}, \quad \mathrm{B} \cdots -\frac{1}{t}, \quad \mathrm{C} \cdots -t$$

よって、それぞれのパラメータ $t'$ は

$$\mathrm{A} \cdots t' = \frac{1}{2 - t}, \quad \mathrm{B} \cdots t' = \frac{1}{2 + t}, \quad \mathrm{C} \cdots t' = \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}$$ と与えられる. □

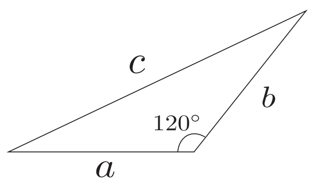
この補題の証明は [1] の p.79〜81 を参照。

## 3. 120 度のピタゴラス数

ここからは [1] の第 2 章に沿って 120 度のピタゴラス数について詳しく説明していく。ピタゴラス数は 90 度の直角三角形で成立するが、120 度のピタゴラス数は 1 つの角度が $\theta$=120 度の三角形の 3 辺の長さである。右下図の三角形において、余弦定理を適用すると、$a^2 + ab + b^2 = c^2$ が成り立つ。

そこで、**120 度のピタゴラス数** $(a, b, c)$ は $a^2 + ab + b^2 = c^2$ を満たす互いに素な $a, b, c \in \mathbb{N}$ のことと定義する。

120 度のピタゴラス数は次の行列 $Q$ を使うことで全て求めることができる。




$$Q = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

この行列 $Q$ を **120 度のピタゴラス行列**と呼ぶ。

**補題 3.1.** $(a, b, c)$ がピタゴラス数のとき、

$$Q\begin{pmatrix} -a \\ a+b \\ c \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ c \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} -b \\ -a \\ c \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} b \\ -a-b \\ c \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ c \end{pmatrix}$$ はピタゴラス数である。

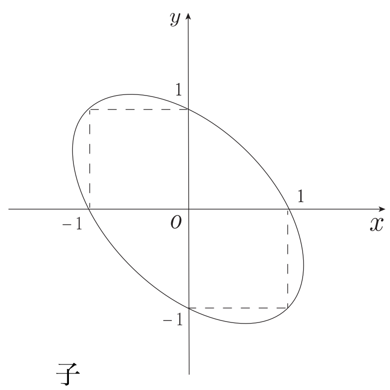
このとき、これらを 120 度の**子ピタゴラス数**と呼び、$(a, b, c)$ をその**親ピタゴラス数**という。上の親ピタゴラス数から子ピタゴラス数を作り出す 5 つの変換を **120 度のピタゴラス変換**と呼ぶ。

$$
\begin{array}{ccccl}
 & & & & \text{子} \\
 & \nearrow & (-a, a+b, c) & \xrightarrow{Q} & Q(-a, a+b, c) \ \ \text{(A)} \\
\text{親} & \nearrow & (-a-b, a, c) & \xrightarrow{Q} & Q(-a-b, a, c) \ \ \text{(B)} \\
(a, b, c) & \rightarrow & (-b, -a, c) & \xrightarrow{Q} & Q(-b, -a, c) \ \ \text{(C)} \\
 & \searrow & (b, -a-b, c) & \xrightarrow{Q} & Q(b, -a-b, c) \ \ \text{(D)} \\
 & \searrow & (a+b, -b, c) & \xrightarrow{Q} & Q(a+b, -b, c) \ \ \text{(E)}
\end{array}
$$

5 つ出てきた子ピタゴラス数を [1] に習い、それぞれ長女 A, 次女 B, 三女 C, 四女 D, 五女 E と呼ぶこととする。また親ピタゴラス数が存在しないピタゴラス数を**祖先**という。120 度のピタゴラス数において祖先は $(3, 5, 7)$ と $(8, 7, 13)$ の 2 つであることが分かる。

ここで 120 度のピタゴラス数 $(a, b, c)$ を座標 $(x, y)$ で表してみる。$x = \frac{a}{c},\ y = \frac{b}{c}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
a^2 + ab + b^2 = c^2 &\Leftrightarrow (\frac{a}{c})^2 + (\frac{a}{c})(\frac{b}{c}) + (\frac{b}{c})^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 1
\end{aligned}
$$



となる。よって $(x, y)$ は右図のような
楕円 $x^2 + xy + y^2 = 1$ $(x > 0, y > 0)$ 上にある。

$(x, y)$ にピタゴラス変換を当て嵌めて、次の補題が得られる。

**補題 3.2.** 120 度のピタゴラス変換

$$
\begin{array}{ccccl}
 & & & & \text{子} \\
 & \nearrow & (-x, x+y) & \xrightarrow{Q} & \text{(長女 A)} \\
\text{親} & \nearrow & (-x-y, x) & \xrightarrow{Q} & \text{(次女 B)} \\
(x, y) & \rightarrow & (-y, -x) & \xrightarrow{Q} & \text{(三女 C)} \\
 & \searrow & (y, -x-y) & \xrightarrow{Q} & \text{(四女 D)} \\
 & \searrow & (x+y, -y) & \xrightarrow{Q} & \text{(五女 E)}
\end{array}
$$

の途中で与えられる座標は全て楕円上に存在する。

[証明]

変換した座標をそれぞれ楕円の方程式に代入すると、

$$
\begin{cases}
A \cdots (-x)^2 + (-x)(x+y) + (x+y)^2 = x^2 + xy + y^2 \\
B \cdots (-x-y)^2 + x(-x-y) + x^2 = x^2 + xy + y^2 \\
C \cdots (-y)^2 + (-y)(-x) + (-x)^2 = x^2 + xy + y^2 \\
D \cdots y^2 + y(-x-y) + (-x-y)^2 = x^2 + xy + y^2 \\
E \cdots (x+y)^2 + (x+y)(-y) + (-y)^2 = x^2 + xy + y^2
\end{cases}
$$

となり、題意は示せた。 □

ピタゴラス数 $(a, b, c)$ に対応する座標 $(x, y)$ は以下のようにパラメータ $t$ を用いて表すことができる。楕円上の点 $(x, y)$ と $(-1, 0)$ を結ぶ直線と $y$ 軸との交点の $y$ 座標を $t$ とおく。このとき $0 < t < 1$ である。$x, y$ の $t$ による表示は、次の連立方程式の解から求められる。

$$
\begin{cases}
x^2 + xy + y^2 = 1 & \text{(円の方程式)} \\
y = t(x+1) = tx + t & \text{(直線の方程式と図形の相似より、} \frac{y}{1+x} = \frac{t}{1} \text{)}
\end{cases}
$$

これを解くと、$x=-1, \frac{t^2-1}{1+t+t^2}$ であり、$x=\frac{t^2-1}{1+t+t^2}$ のとき、$y=\frac{2t+t^2}{1+t+t^2}$ となる。また $(x,y)$ が有理点ならば $t$ は有理数であり、その逆も示される。ここで $t=\frac{n}{m}$ としておくことで、

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t+t^2}=\dfrac{1-(\dfrac{n}{m})^2}{1+(\dfrac{n}{m})+(\dfrac{n}{m})^2}=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+mn+n^2} \\ y=\dfrac{2t+t^2}{1+t+t^2}=\dfrac{2(\dfrac{n}{m})+(\dfrac{n}{m})^2}{1+(\dfrac{n}{m})+(\dfrac{n}{m})^2}=\dfrac{2mn+n^2}{m^2+mn+n^2} \end{cases}$$

となる。先程 $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$ と仮定しているので、120 度のピタゴラス数 $(a,b,c)$ が $(m^2-n^2, 2mn+n^2, m^2+mn+n^2)$ となるには既約かどうかを確かめる必要があるが、$m^2-n^2, 2mn+n^2, m^2+mn+n^2$ の公約数は 1 または 3 である。よって、次が成り立つ。

**定理 3.3.** $t=\frac{n}{m}$ ($m,n\in\mathbb{N}$ かつ互いに素のとき) とすると

(i)$m,n$ を 3 で割った余りが異なるとき

$$a=m^2-n^2, \quad b=2mn+n^2, \quad c=m^2+mn+n^2.$$

(ii)$m,n$ を 3 で割った余りが同じとき

$$a=\frac{m^2-n^2}{3}, \quad b=2mn+n^2, \quad c=\frac{m^2+mn+n^2}{3}.$$

このとき (i) の場合のみ $(a,b,c)$ は 120 度のピタゴラス数である ([1] の p.192〜193 を参照)。

親ピタゴラス数 $(a,b,c)$ から子ピタゴラス数に対応するそれぞれ 5 つの楕円上の有理点をパラメータ $s$ で表すと次が成り立つ。

**補題 3.4.** 5 つの有理点のパラメータは次で与えられる。

$$A\cdots s=\frac{1}{t} \qquad B\cdots s=-\frac{t+1}{t} \qquad C\cdots s=-t-1 \qquad D\cdots s=-\frac{1}{t+1} \qquad E\cdots s=-\frac{t}{t+1}$$
$$(0<t<1)$$

[証明]

長女 A で行うと、

$$(x,y) \qquad \Leftrightarrow \qquad (-x, x+y)$$
$$x=\frac{t^2-1}{1+t+t^2} \qquad -x=\frac{s^2-1}{1+s+s^2}$$

よって、$\frac{t^2-1}{1+t+t^2}=-\frac{s^2-1}{1+s+s^2}$ である。ここで $s$ について解を求めると、

$$t(2t+1)s^2+(t^2-1)s-(t+2) \quad \Leftrightarrow \quad s=\frac{1}{t},\ -\frac{t+2}{2t+1}$$
$$s>0 \text{ なので、} s=\frac{1}{t}$$

他の四姉妹も同様な操作を行うことで証明できる。 □

補題 2.4(2) の変換 $t\longmapsto\frac{1}{2-\frac{1}{t}}$(これもピタゴラス数と呼ぶ。) とパラメータ $s$ を使うことで子ピタゴラス数のパラメータ $t'$ を $t$ を用いて表すことができる。具体的には、元のパラメータ $t$ から楕円上のパラメータ $s$ へ変換し、その後にピタゴラス変換することで $t'$ が出てくる。

$$t \qquad \Rightarrow \qquad s \qquad \Rightarrow \qquad t'$$

楕円上へ移動 $\qquad t'=\dfrac{1}{2-\frac{1}{s}}$

例として長女 A でこの操作を行うと、

**例 3.5.** $s = \frac{1}{t}$ より、$t'$ に代入すると

$$t' = \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{2 - t}.$$

他の四姉妹も同様に行うと、次が成立する (証明は [1] の p.204〜215 を参照)。

**補題 3.6.** 120 度の親ピタゴラス数のパラメータを $t(0 < t < 1)$、その子ピタゴラス数のパラメータを $t'$ とすると、

$$A \cdots t' = \frac{1}{2-t} \quad B \cdots t' = \frac{t+1}{3t+2} \quad C \cdots t' = \frac{t+1}{2t+3} \quad D \cdots t' = \frac{1}{t+3} \quad E \cdots t' = \frac{t}{3t+1}$$

また $t = \frac{n}{m}$ を代入すると、五姉妹を生むパラメータ ($m, n$ で表した場合) は次のようになる。

$$A \cdots t' = \frac{m}{2m-n} \quad B \cdots t' = \frac{m+n}{2m+3n} \quad C \cdots t' = \frac{m+n}{3m+2n} \quad D \cdots t' = \frac{m}{3m+n} \quad E \cdots t' = \frac{n}{m+3n}$$

$t' = \frac{n'}{m'}$ より、変換 A の場合、$\frac{n'}{m'} = \frac{m}{2m-n}$ が成り立つ。このとき分母と分子 $(m, 2m-n)$ は既約である。これはユークリッドの互除法を使うことで証明される。それぞれ、

$$\begin{cases} A \cdots (2m-n, m) = (m-n, m) = (m-n, n) = (m, n) \\ B \cdots (2m+3n, m+n) = (n, m+n) = (n, m) \\ C \cdots (3m+2n, m+n) = (m, m+n) = (m, n) \\ D \cdots (3m+n, m) = (n, m) \\ E \cdots (m+3n, n) = (m, n) \end{cases}$$

であり、$m, n$ の条件より $m, n$ は互いに素なので、既約である。よって以下の命題が示される。

**命題 3.7.** 120 度の親ピタゴラス数が $(m, n)$ に対応し、子ピタゴラス数が $(m', n')$ に対応しているとき、

$$\begin{aligned} &A \cdots m' = 2m - n, && n' = m \\ &B \cdots m' = 2m + 3n, && n' = m + n \\ &C \cdots m' = 3m + 2n, && n' = m + n \\ &D \cdots m' = 3m + n, && n' = m \\ &E \cdots m' = m + 3n, && n' = n \end{aligned}$$

親ピタゴラス数から直接子ピタゴラス数を求める場合は、次のピタゴラス行列を用いればよい。
([1] の p.222〜224 を参照)

$$A \cdots Q = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix} \qquad B \cdots Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad C \cdots Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D \cdots Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad E \cdots Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

## 4. 五姉妹の連分数

連分数とは、次のような分母に更に分数が含まれている分数のことを指す。

$$a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cfrac{1}{a_4 \pm \cfrac{1}{\ddots \pm \cfrac{1}{a_{n-1} \pm \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

この連分数を $[a_1\pm, a_2\pm, \cdots, a_{n-1}\pm, a_n]$ で表すことにする。

**定理 4.1.** [五姉妹の連分数] $a=2$ または $a=3$ とし、$X=A,B,C,D,E$ とするとき、祖先から変換 $X$ を $n$ 回続けて得られるパラメータを $t_n$ と書く。このとき $t_n$ は次の連分数で表される。

$$\text{長女 A} \cdots t_n = \overbrace{[0+,2-,2-,2-,\cdots,2-,a]}^{n\text{ 個}} \qquad \text{次女 B} \cdots t_n = \overbrace{[0+,3-,1+,\cdots,3-,1+,a]}^{2n\text{ 個}}$$

$$\text{三女 C} \cdots t_n = \overbrace{[0+,2+,1+,\cdots,2+,1+,a]}^{2n\text{ 個}} \qquad \text{四女 D} \cdots t_n = \overbrace{[0+,3+,3+,\cdots,3+,a]}^{n\text{ 個}}$$

$$\text{五女 E} \cdots t_n = \overbrace{[0+,3+,0+,\cdots,0+,a]}^{2n\text{ 個}}$$

[証明]
長女 A について示す。$t=\frac{n}{m}$ より $t'$ は

$$t' = \frac{n'}{m'} = \frac{m}{2m-n} = \frac{\frac{n}{m}}{2-\frac{n}{m}} = \frac{1}{2-t}$$

と表される。したがって、$t_n = \frac{1}{2-t_{n-1}}$ となる。よって $t_n = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2-t_{n-2}}}$ となる。これを繰り返すと長女 A の連分数展開が得られる。次女 B の場合は、

$$t' = \frac{n'}{m'} = \frac{m+n}{2m+3n} = \frac{1+\frac{n}{m}}{2+3\frac{n}{m}} = \frac{1+t}{2+3t} = \frac{1}{\frac{2+3t}{1+t}} = \frac{1}{\frac{3(1+t)-1}{1+t}} = \cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+t}}$$

となる。よって、$t_n = \dfrac{1}{3-\frac{1}{1+t_{n-1}}}$ となる。$t'$ は子ピタゴラス数、$t$ は親ピタゴラス数のパラメータとおいているので、連続して続くことを踏まえると、

$$t_n = \overbrace{[0+,3-,1+,\cdots,3-,1+,a]}^{2n\text{ 個}}$$

が分かる。残りの 3 つも同様に行うことで、定理が示される。 □

## 5. 五姉妹の連分数からパラメータ $t$ に関する漸化式を導く

ここからはパラメータ $t$ に関する漸化式とピタゴラス変換との繋がりを見る。5 つの連分数の形から次の 2 パターンに分けて考える。

(i) 長女 A, 五女 E の場合

$t_n$ を $n$ の式で表すことができる。長女 A で $t_1=\frac{1}{2}$ の場合、連分数の途中まで（$t_1$,$t_2$,$t_3$... という順に）計算して求めてみる。

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}} = \frac{2}{3} \qquad t_3 = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{4}$$

以下同様に、$t_4=\frac{4}{5}, t_5=\frac{5}{6}$ となる。これより $t_n=\frac{n}{n+1}$ であると推測される。これは数学的帰納法を使うことで正しいことが示される。$t_1=\frac{1}{3}$ の場合も同様に、

$$t_1 = \frac{1}{3} \qquad t_2 = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{5} \qquad t_3 = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3}}} = \frac{5}{7}$$

以下同様に、$t_4=\frac{7}{9}, t_5=\frac{9}{11}$ となる。これより $t_n=\frac{2n-1}{2n+1}$ であると推測される。これも数学的帰納法で証明できる。

五女 E の連分数も先ほどと同様に操作を行うと、$t_1 = \frac{1}{3}$ の場合、

$$t_1 = \frac{1}{3} \qquad t_2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \qquad t_3 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{1}{9}$$

同様に $t_4 = \frac{1}{12}, t_5 = \frac{1}{15}$ となる。これより、$t_n = \frac{1}{3n}$ だと推測される。$t_1 = \frac{1}{2}$ の場合も同様に、

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5} \qquad t_3 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{0 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{1}{8}$$

同様に $t_4 = \frac{1}{11}, t_5 = \frac{1}{14}$ となる。これより、$t_n = \frac{1}{3n-1}$ だと推測され、数学的帰納法で示すことができる。

(ii) 次女 B, 三女 C, 四女 D の場合
$t_n$ を $n$ の式で表すのは困難である。しかし $t_n$ の漸化式は補題 3.6. の式より次のように求められる。

$$\text{次女 B} \quad t_n = \frac{1 + t_{n-1}}{3t_{n-1} + 2} \qquad \text{三女 C} \quad t_n = \frac{1 + t_{n-1}}{2t_{n-1} + 3} \qquad \text{四女 D} \quad t_n = \frac{1}{3 + t_{n-1}}$$

例えば次女 B で、$t_1 = \frac{1}{2}$ の場合、

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3 \times \frac{1}{2} + 2} = \frac{3}{7} \qquad t_3 = \frac{1 + \frac{3}{7}}{3 \times \frac{3}{7} + 2} = \frac{10}{23}$$

となる。$t_1 = \frac{1}{3}$ の場合、

$$t_1 = \frac{1}{3} \qquad t_2 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{3 \times \frac{1}{3} + 2} = \frac{4}{9} \qquad t_3 = \frac{1 + \frac{4}{9}}{3 \times \frac{4}{9} + 2} = \frac{13}{30}$$

である。
以上述べたことをまとめると、

**系 5.1.**

(1) 長女 A の系列のパラメータは次で与えられる; $t_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & (\text{祖先ピタゴラス数が } (3,5,7) \text{ である}) \\ \frac{2n-1}{2n+1} & (\text{祖先ピタゴラス数が } (8,7,13) \text{ である}) \end{cases}$

(2) 五女 E の系列のパラメータは次で与えられる; $t_n = \begin{cases} \frac{1}{3n} & (\text{祖先ピタゴラス数が } (8,7,13) \text{ である}) \\ \frac{1}{3n-1} & (\text{祖先ピタゴラス数が } (3,5,7) \text{ である}) \end{cases}$

(3) 次女 B, 三女 C, 四女 D の系列のパラメータは次の漸化式を満たす。

$$\begin{cases} \text{次女 B の漸化式} \cdots & t_n = \frac{1+t_{n-1}}{2+3t_{n-1}} \\ \text{三女 C の漸化式} \cdots & t_n = \frac{1+t_{n-1}}{3+2t_{n-1}} \\ \text{四女 D の漸化式} \cdots & t_n = \frac{1}{3+t_{n-1}} \end{cases}$$

**注意 5.2.** $t = \lim_{n\to\infty} t_n$ とおくと、初期条件にかかわらず、

$$\text{長女 A}\cdots t = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots}}}} = 1 \qquad \text{次女 B}\cdots t = \cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = \frac{\sqrt{13}-1}{6}$$

$$\text{三女 C}\cdots t = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{四女 D}\cdots t = -1+\cfrac{3}{3-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

$$\text{五女 E}\cdots t = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{0+\ddots}}}} = 0$$

## 6. 長女及び五女の系列の 120 度のピタゴラス数を求める公式

(i) 長女 A の場合

このとき $t_n$ は $n$ に関する式であり $n \in \mathbb{N}$ なので、$t_n = \frac{n'}{m'}$ とおくことでピタゴラス変換で表すことができる。実際に長女 A でやってみる。まず $t_n = \frac{n}{n+1}$ として考えると、$t_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ となる。このとき $t_{n+1} = \frac{n''}{m''}$ とおく。ピタゴラス数まで求めると、$t_n = \frac{n}{n+1}(= \frac{n'}{m'})$ に対して $m' = n+1, n' = n$ とおくと、対応するピタゴラス数は

$$\begin{cases} a' = m'^2 - n'^2 = 2n+1 \\ b' = 2m'n' + n'^2 = 3n^2 + 2n \\ c' = m'^2 + m'n' + n'^2 = 3n^2 + 3n + 1 \end{cases}$$

により与えられる。よって長女の系列のピタゴラス数は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 3n^2+2n \\ 3n^2+3n+1 \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により与えられる。

実際に $(a', b', c')$ や $(a'', b'', c'')$ に $n = 1, 2$ を代入すると、

$$\begin{cases} a' = 2\times 1 + 1 = 3 \\ b' = 3\times 1 + 2\times 1 = 5 \\ c' = 3\times 1 + 3\times 1 + 1 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a' = 2\times 2 + 1 = 5 \\ b' = 3\times 4 + 2\times 2 = 16 \\ c' = 3\times 4 + 3\times 2 + 1 = 19 \end{cases}$$

となる。これは親ピタゴラス数 $(3, 5, 7)$ の長女 $A(5, 16, 19)$ となっている。$t_n$ は親ピタゴラス数 $(3, 5, 7)$ から長女 A のみ引き継ぐ形となっている。

次に $(8, 7, 13)$ を祖先とする長女の系列のピタゴラス数の公式を求める。$t_n = \frac{2n-1}{2n+1}(= \frac{n'}{m'})$ に対し $m' = 2n+1, n' = 2n-1$ とおくと、対応するピタゴラス数は

$$\begin{cases} a' = m'^2 - n'^2 = 8n \\ b' = 2m'n' + n'^2 = 12n^2 - 4n - 1 \\ c' = m'^2 + m'n' + n'^2 = 12n^2 + 1 \end{cases}$$

となる。よって $(8,7,13)$ を祖先とする長女の系列のピタゴラス数は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8n \\ 12n^2-4n-1 \\ 12n^2+1 \end{pmatrix} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により与えられる。実際に $(a',b',c')$ に $n=1,2$ を代入すると、

$$\begin{cases} a' = 8\times 1 = 8 \\ b' = 12\times 1 - 4\times 1 - 1 = 7 \\ c' = 12\times 1 + 1 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 8\times 2 = 16 \\ b' = 12\times 4 - 4\times 2 - 1 = 39 \\ c' = 12\times 4 + 1 = 49 \end{cases}$$

となる。これは親ピタゴラス数 $(8,7,13)$ の長女 $\mathrm{A}(16,39,49)$ となっている。よって $t_n$ は親ピタゴラス数 $(8,7,13)$ から長女 A のみ引き継ぐ形となっている。

(ii) 五女 E の場合 $t_n = \frac{1}{3n}$ のとき $t_n = \frac{1}{3n}(= \frac{n'}{m'})$ に対して $m'=3n, n'=1$ とおくと、

$$\begin{cases} a' = m'^2 - n'^2 = 9n^2 - 1 \\ b' = 2m'n' + n'^2 = 6n + 1 \\ c' = m'^2 + m'n' + n'^2 = 9n^2 + 3n + 1 \end{cases}$$

により与えられる。よって五女の系列のピタゴラス数は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9n^2-1 \\ 6n+1 \\ 9n^2+3n+1 \end{pmatrix} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により与えられる。実際に $(a',b',c')$ に $n=1,2$ を代入すると、

$$\begin{cases} a' = 9\times 1 - 1 = 8 \\ b' = 6\times 1 + 1 = 7 \\ c' = 9\times 1 + 3\times 1 + 1 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 9\times 4 - 1 = 35 \\ b' = 6\times 2 + 1 = 13 \\ c' = 9\times 4 + 3\times 2 + 1 = 43 \end{cases}$$

となる。これは親ピタゴラス数 $(8,7,13)$ の五女 $\mathrm{E}(35,13,43)$ となっている。よって $t_n$ は親ピタゴラス数 $(8,7,13)$ から五女 E のみ引き継ぐ形となっている。

$t_n = \frac{1}{3n-1}$ のとき、$t_n = \frac{1}{3n-1}(= \frac{n'}{m'})$ に対し、$m' = 3n-1, n'=1$ とおくと、対応するピタゴラス数は

$$\begin{cases} a' = m'^2 - n'^2 = 9n^2 - 6n \\ b' = 2m'n' + n'^2 = 6n - 1 \\ c' = m'^2 + m'n' + n'^2 = 9n^2 - 3n + 1 \end{cases}$$

により与えられる。よって五女の系列のピタゴラス数は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9n^2-6n \\ 6n-1 \\ 9n^2-3n+1 \end{pmatrix} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により与えられる。実際に $(a',b',c')$ に $n=1,2$ を代入すると、

$$\begin{cases} a' = 9\times 1 - 6\times 1 = 3 \\ b' = 6\times 1 - 1 = 5 \\ c' = 9\times 1 - 3\times 1 + 1 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} a' = 9\times 4 - 6\times 2 = 24 \\ b' = 6\times 2 - 1 = 11 \\ c' = 9\times 4 - 3\times 2 + 1 = 31 \end{cases}$$

となる。これは親ピタゴラス数 $(3,5,7)$ の五女 $\mathrm{E}(24,11,31)$ となっている。よって $t_n$ は親ピタゴラス数 $(3,5,7)$ から五女 E のみ引き継ぐ形となっている。

残りの B,C,D については $n$ の式で表せないが、漸化式の形で似たような結果が得られる。しかし、偶数番目と奇数番目で分けて考察しなければならない。その部分を詳しく調べることは今後の課題である。

○参考文献

[1] 小林吹代, 「ピタゴラス数を生み出す行列のはなし」, ベレ出版, 2008 年.