2017 年 9 月 22 日

折り紙で作る斜三角錐–自己相似な空間充填図形–

和久井道久
(関西大学システム理工学部数学科)

このノートは 2017 年 9 月 15 日に関西大学で開催された関西大学北陽中学校連携「理工系研究室体験プログラム」のための事前準備のために作成されたものである (但し、補遺に載せた折り紙で作る手づくりポリドロンは、サマーキャンパスで実施した内容であり、今回は扱っていない)。数学科からは表現論研究室に所属する 4 年生２名と私が参加した。

この体験プログラムの受験者は２年生である。ルートの記号 $\sqrt{}$ は、まだ未学習であるが、単なる記号と見てもらうことにして使用した。イベントは以下の段取りで行われた。

イベント内容 (9 時〜13 時 15 分)

9 時〜9 時 15 分	開講式・全体ガイダンス
9 時 15 分〜9 時 30 分	各プログラム会場へ移動
9 時 30 分〜9 時 45 分	挨拶、スケジュール・イベント内容の確認
9 時 45 分〜11 時 00 分	平面・空間充填問題の説明 (§1 と §3 のはじめ部分の説明) 実習 1 と実習 2、Zome Tool で実演
11 時 00 分〜11 時 15 分	休憩
11 時 15 分〜12 時 15 分	作り方の説明をしながら、各人で正三角形を作った後、 斜三角錐を作成
12 時 15 分〜12 時 30 分	斜三角錐をブロック積みして結果を披露、まとめ
12 時 30 分〜12 時 45 分	学生へのインタビューまたは質疑応答
12 時 45 分〜13 時 00 分	終わりの挨拶後、最初に集合した会場へ移動
13 時 00 分〜13 時 15 分	修了式・プログラム総括

実施して思ったことなどを簡単に記す。

平面充填図形を描くための実習 1 では、型のトレースに予想以上に時間がかかった。簡単のため、上下と平行移動だけで作られるタイル張りを作成してもらうつもりであったが、反転を加えてタイル張りを作った学生もいた (その方がうまく図形をつなげやすいことは、そのときに気がついた)。各学生の個性が反映されたタイル張りが出来上がって、面白かった。

休憩中は、思い思いに Zome Tool やポリドロンで作られた多面体を積み重ねたり、組み立てたりして遊んだ。あっという間に時間が来て、後半のプログラムに入った。

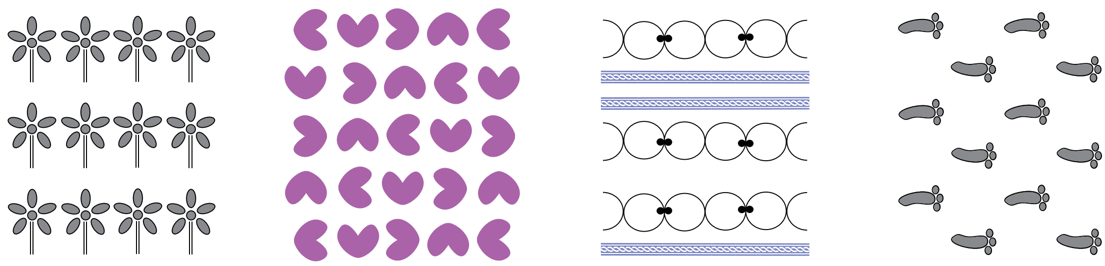
折り紙で正三角形を作るところは全員が戸惑わずにできた。次の斜三角錐の作成で個人差が出たものの時間内に間に合い、各人で作った斜三角錐をプラバン製斜三角錐の中に納めてそれが自己相似体であることを体験した。それと同時に、正三角錐では空間充填できないことと自己相似体でないことも体験した。

全体を通じて無理なく修了できたが、参加した学生は満足してくれたのだろうか、少し気になるところです。

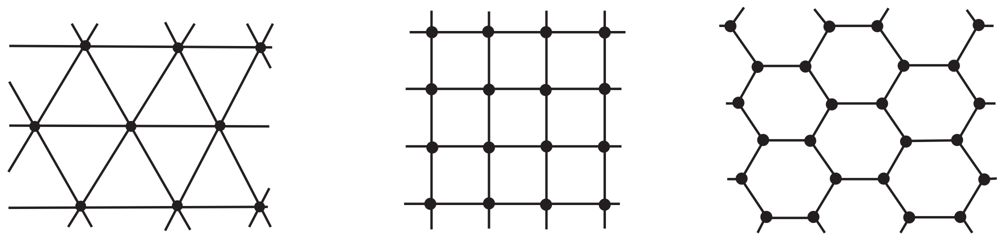
§1. 平面充填図形とは

同じ形の図形を敷き詰めて、平面をタイル張りすることができるとき、その図形を平面充填図形と呼ぶ [10]。

タイル張りの例



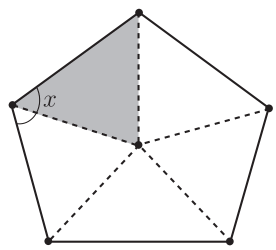
正三角形、正方形、正六角形をそれぞれ用いれば、平面をタイル張りすることができることはすぐにわかる。



正五角形ではどうだろうか？この問題を解くためにまず、次の問題を考えてみよう。

問題 1. 正三角形の 1 つの内角は 60° であり、正方形の 1 つの内角は 90° である。では、正五角形、正六角形の 1 つの内角は何度か？より一般に、正 m 角形の 1 つの内角は何度か？
(**解**)

正 m 角形を重心から各頂点に向かって線を引いて、m 個の合同な二等辺三角形に分ける。正 m 角形の 1 つの内角を x とおくと、各二等辺三角形の頂角は $180^\circ - x$ であるから、$m(180^\circ - x) = 360^\circ$ が成り立つ。これを解いて、$x = 180^\circ\left(1 - \dfrac{2}{m}\right)$ を得る。 □



問題 2(**正多角形による平面充填問題**). 正五角形を敷き詰めて平面をタイル張りすることができるか？但し、各頂点から出ている辺の個数は同じであるとする。
(**解**)

正 m 角形を敷き詰めて平面をタイル張りすることができたとする。頂点のまわりに q 個の正 m 角形が集まっているとすると、問題 1 より

$$(*) \qquad 180^\circ\left(1 - \frac{2}{m}\right) \times q = 360^\circ$$

となる。$m \geq 3$ であるから、$1-\dfrac{2}{m} \geq 1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ である。よって、

$$2 \geq \frac{q}{3}$$

を得る。故に、$q=3,4,5,6$ である。$(*)$ より、$q=3,4,5,6$ に応じて $m=6,4,\frac{10}{3},3$ となる。よって、$q=5$ となることはない。さらに、各頂点から同数の辺が出ていて、同種の正多角形で平面をタイル張りすることができるのは、面が三角形、四角形、六角形のときに限ることがわかった。実際、三角形、四角形、六角形ならば、先にみたように平面をタイル張りすることができる。 □

次に、平面を 2 種類以上の正多角形でタイル張りすることを考えよう [10]。ここでは話を簡単にするために、丁度 2 種類の正多角形でタイル張りすることを考える。次の条件の下で、平面の充填問題を考察しよう。

(i) 面は正 m 角形と正 n 角形の 2 種類である。
(ii) 各頂点から出ている辺の数は、頂点によらずに一定である。
(iii) 各頂点のまわりにあつまる正 m 角形、正 n 角形の数は、頂点によらずに一定であり、それらの配置も同じである。

各頂点のまわりに、正 m 角形が s 個、正 n 角形が t 個集まっているとすると、

$$s\Big(1-\frac{2}{m}\Big)+t\Big(1-\frac{2}{n}\Big)=2 \tag{1.1}$$

が成り立つ。各頂点から出ている辺の個数を q とおくと、$q=s+t$ である。また、$m \geq 3$ であるから、

$$2=s\Big(1-\frac{2}{m}\Big)+t\Big(1-\frac{2}{n}\Big) \geq s\Big(1-\frac{2}{3}\Big)+t\Big(1-\frac{2}{3}\Big)=\frac{s+t}{3}=\frac{q}{3}$$

となる。よって、$q=3,4,5,6$ である。

(1.1) より、

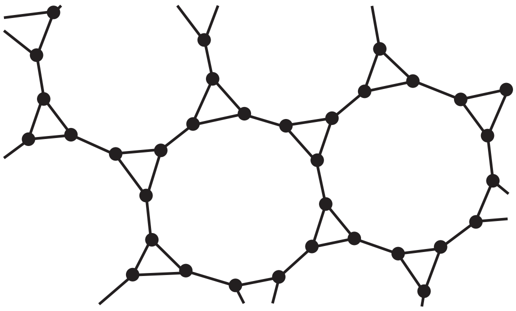
$$\frac{s}{m}+\frac{t}{n}=\frac{q-2}{2} \tag{1.2}$$

を得る。$n>m \geq 3$ としてこの方程式を満たす整数 (q,s,t,m,n) の組を求めると、以下の 6 通りとなる (証明は [14; 補遺] 参照):

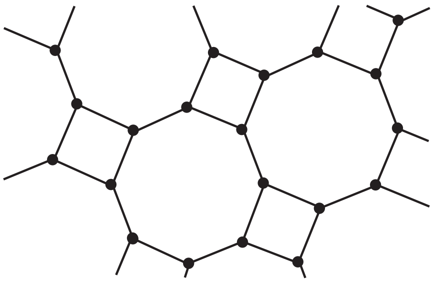
$(q,s,t,m,n)=(3,1,2,3,12),\ (3,1,2,4,8),\ (3,2,1,5,10),\ (4,2,2,3,6),\ (5,3,2,3,4),\ (5,4,1,3,6).$

このうち、$(q,s,t,m,n)=(3,2,1,5,10)$ となるような平面充填は存在しない。

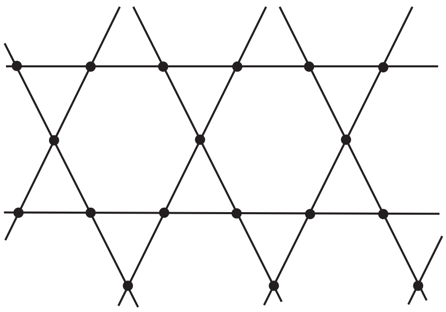
- $(q,s,t,m,n)=(3,1,2,3,12)$ となる平面充填：

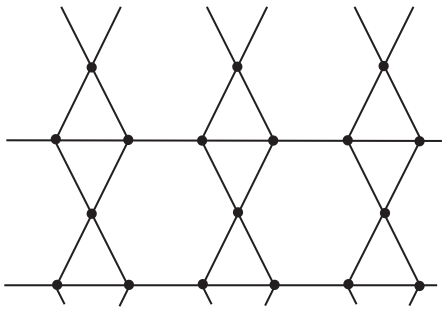


- $(q,s,t,m,n)=(3,1,2,4,8)$ となる平面充填：

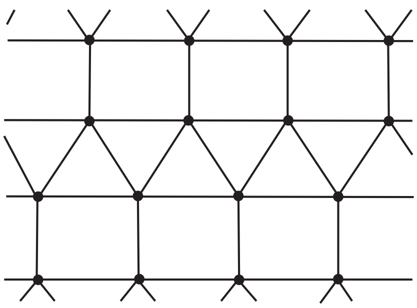


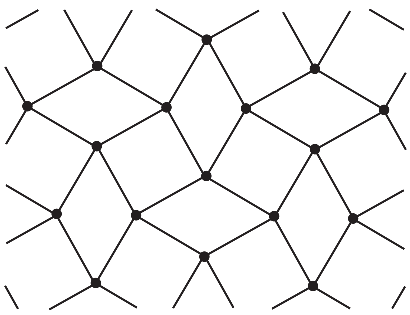
- $(q,s,t,m,n)=(4,2,2,3,6)$ となる平面充填は次の 2 通りのパターンがある：



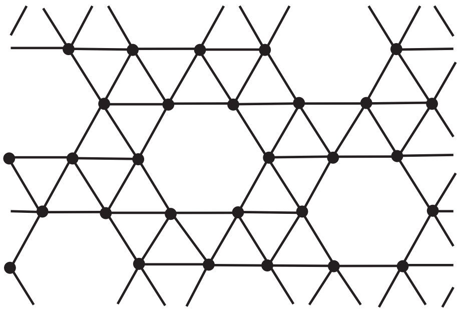


- $(q,s,t,m,n)=(5,3,2,3,4)$ となる平面充填は次の 2 通りのパターンがある：



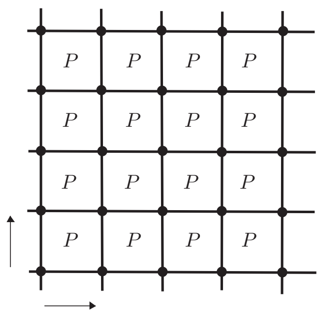


- $(q, s, t, m, n) = (5, 4, 1, 3, 6)$ となる平面充填：

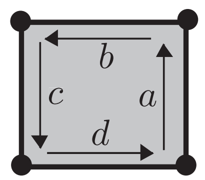


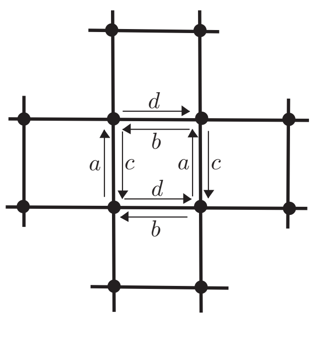
上で挙げたような平面の基本的なタイル張りをもとにして、様々な模様のタイル張りを作ることができる。このようなことが可能になる背景には、幾何的模様を不変にする「群」の存在がある。「群」は大学で学ぶ数学の主要な概念の一つであるが、ここではこれ以上深入りしない。

平面の基本的なタイル張りとして、正方形が格子状に並んでいるものを考える。このタイル張りは、1つの正方形 (基本図形) をコピーして、上下と左右の2方向の平行移動によって敷き詰めたものと考えられる。敷き詰め方によりいろいろな模様が出来上がる。下図はその一例である。

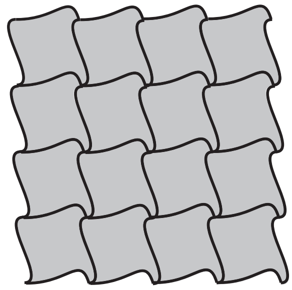


この敷き詰め方の構造を理解するために、1つの正方形の4つの辺に向きと a, b, c, d のラベルを付ける (右図参照)。すると、隣接する正方形同士の辺の関係は下図のようになる。

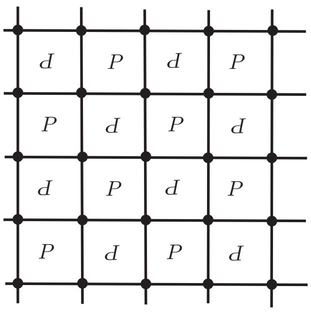




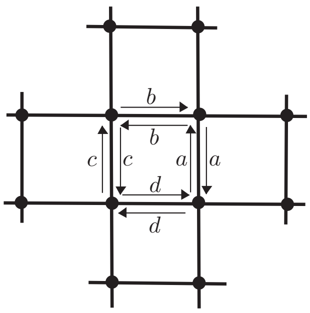
これを基礎に辺を歪ませて作ったタイル張りの一例が次図である (詳しい作り方は [9] を参照)。



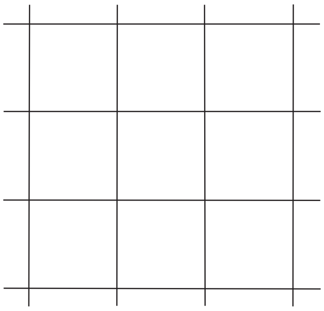
下図のように各辺の中点において 180° 回転を繰り返し行って、正方形 (基本図形) を敷き詰める方法も考えられる。

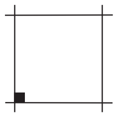


この敷き詰め方の場合、正方形同士の辺の隣接関係は下図のようになる。これをもとに別のパターンの格子状のタイル張りの変形を作ることができる。



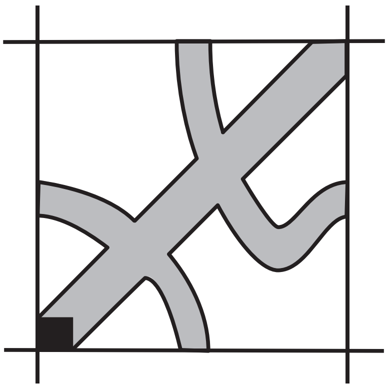
実習 1. 上下と左右の方向の平行移動だけで作られるタイル張りを以下の要領で作ってみよう。





① 右上のように正方形が印刷された手元の厚紙に基本図形を作成する。

- 基本図形の中に左下の小さな正方形が含まれるように、一続きの図形を描く (左右の辺上で切り取られる部分が一致し、上下の辺上で切り取られる部分が一致するように描くと、出来上がったときの模様がきれいに繋がる)。
(**参考例**)



- 正方形の外枠に沿って切り取る。
- 切り取った正方形の内部を今度は自分で描いた線に沿って切り取る。

② 印刷された格子の上にトレーシングペーパーを載せたものを使用して、模様を作成する。①で用意したピースをそのトレーシングペーパーに載せて輪郭をなぞっていく。その際、基本図形の中に左下の小さな正方形を格子の左下の角に合わせるようにする。

§2. 空間充填立体

平面のタイル張りを立体で考えたものが空間充填 (ブロック積み) である。合同な立体を面同士をぴったり重ね合わせて空間を埋め尽くすことを考える。

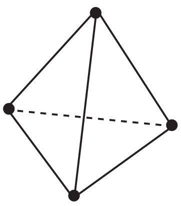
平面のタイル張りから、それに高さを加えて角柱を作ることにより、ブロック積みができる。他にどのような空間充填図形があるだろうか。以下では、各辺のまわりに集まる立体の配列の仕方が同一であるものに限ってこの問題を考察しよう。

実習 2. 同じ大きさの正四面体を使ってブロック積みができるか？ポリドロンで作った正四面体を使って試してみよう。

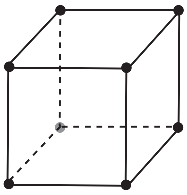
(**解**)

ブロック積みができるためには、2 面角の総和が $360°$ でなければならない。5 つの正四面体を 1 つの辺の回りに集めてみると、わずかな隙間が生じてしまう。このことから、正四面体ではブロック積みできないことが実感できる。実際、正四面体の場合、二面角は約 $70.5°$ であり [6; p.104]、$70.5 \times n = 360$ を満たす自然数 n は存在しない。このことから、正四面体だけでブロック積みすることはできないことがわかる。 □

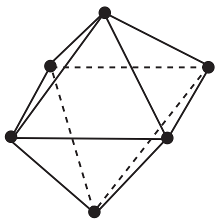
多面体の代表例.



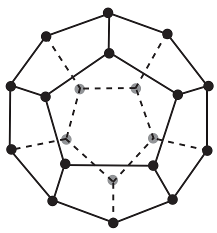
正四面体



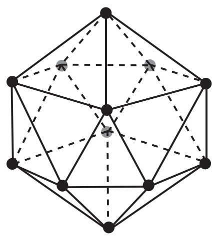
立方体



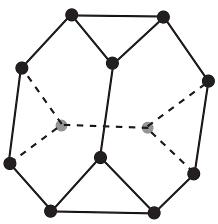
正八面体



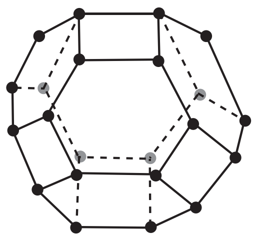
正十二面体



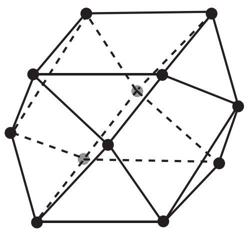
正二十面体



切頂四面体



切頂八面体



立方八面体

次の立体はどれもブロック積み可能なことがわかる [8; p.157](実例については [6] も参照)。

① 立方体（各辺のまわりに 4 個づつ立方体を配置）

② 正四面体と正八面体（各辺のまわりに 2 個づつ正四面体と正八面体を配置）

③ 正四面体と切頂四面体（各辺のまわりに 1 個の正四面体と 3 個の切頂四面体を配置）

④ 切頂八面体（各辺のまわりに 3 個づつ切頂八面体を配置）

⑤ 正八面体と立方八面体（各辺のまわりに 1 個の正八面体と 2 個の立方八面体を配置）

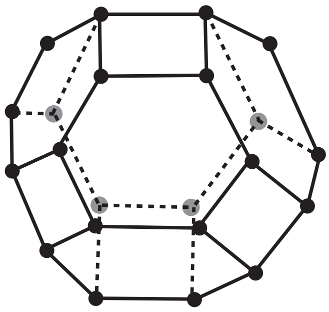
実習 3. 上の 5 つの立体を Zome Tool で作ったものを見て観察しょう。

§3. 自己相似立体

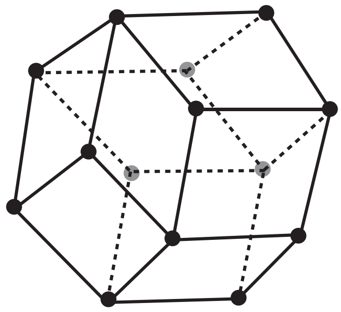
凸多面体を平行移動により隙間なく敷き詰めて空間を埋め尽くすことができるとき、そのような凸多面体を**平行多面体**という。平行多面体は、次の 5 種類に限られることが Fedorov [4] や Minkowski [7] によって示されている (これらの事実に関しては [2, 5] も参照)。

F_1 : 平行六面体 (直方体や立方体を含む) の族
F_2 : 斜六角柱 (直六角柱を含む) の族
F_3 : 切頂八面体の族
F_4 : 菱形十二面体の族
F_5 : 長菱形十二面体の族

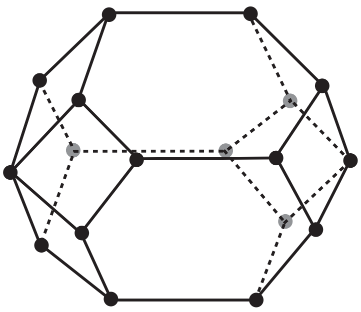
F_3



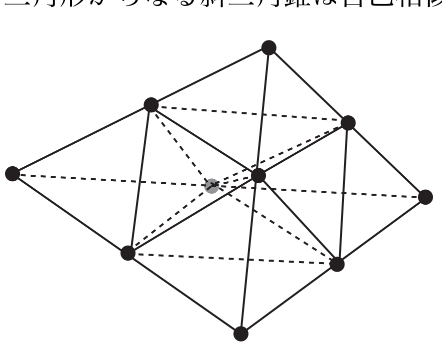
F_4



F_5



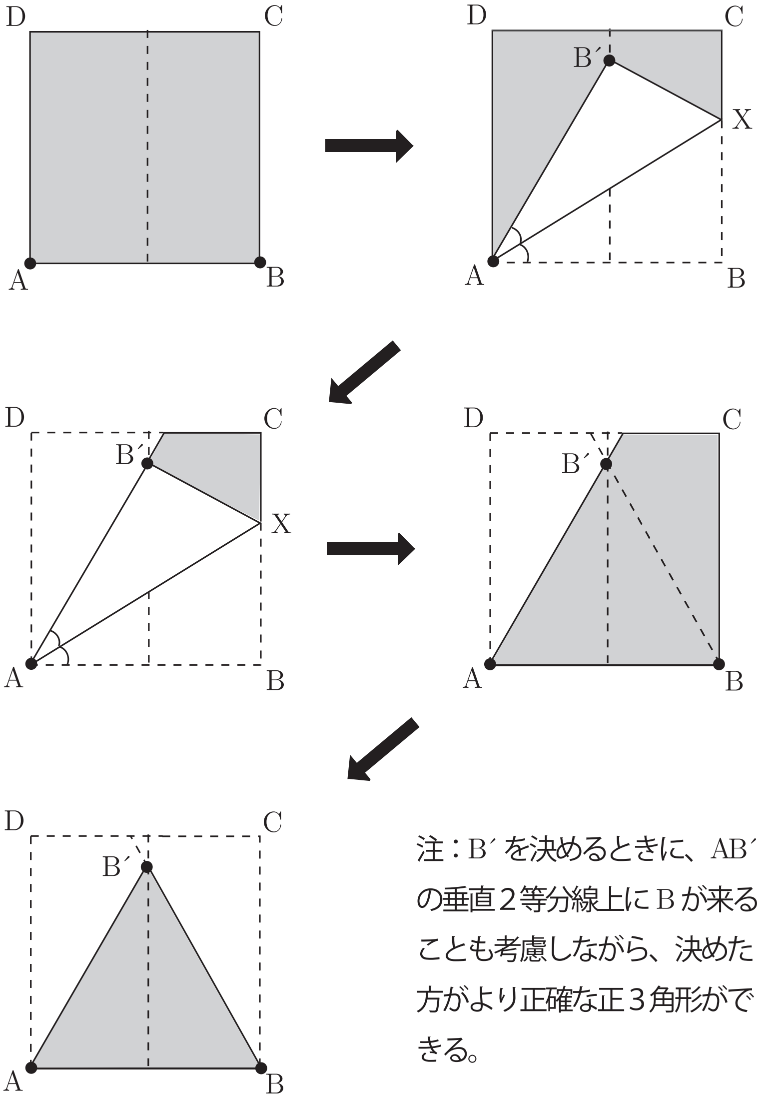
平行多面体は自己相似立体であるが、これ以外に自己相似性をもった立体は多数存在する。例えば、$2 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$ の三角形からなる斜三角錐は自己相似立体である。



この斜三角錐は、効率のよさと安定性のために、牛乳の容器として昔使われていたテトラパックと密接に関係がある [11–13]([6; p.34] も参照)。以下では、この斜三角錐を折り紙で作り、実際に自己相似性をもっていることを確かめよう。

実習 4. $2 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$ の三角形からなる斜三角錐を正方形折り紙で作る際に 60° の角度を折るところがポイントになるので、肩ならしを兼ねて折り紙で正三角形を作ってみよう。

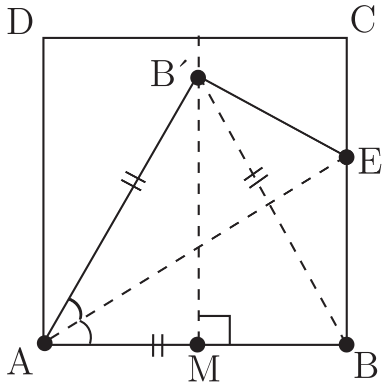
3.1. **折り紙で作る正三角形.** 1 枚の折り紙 (正方形) から次の図のように折っていくと正三角形ができる。



注：B′ を決めるときに、AB′ の垂直２等分線上に B が来ることも考慮しながら、決めた方がより正確な正３角形ができる。

問題 3. 上の折り方で、本当に正三角形ができているだろうか？

次のステップで考えてみよう。

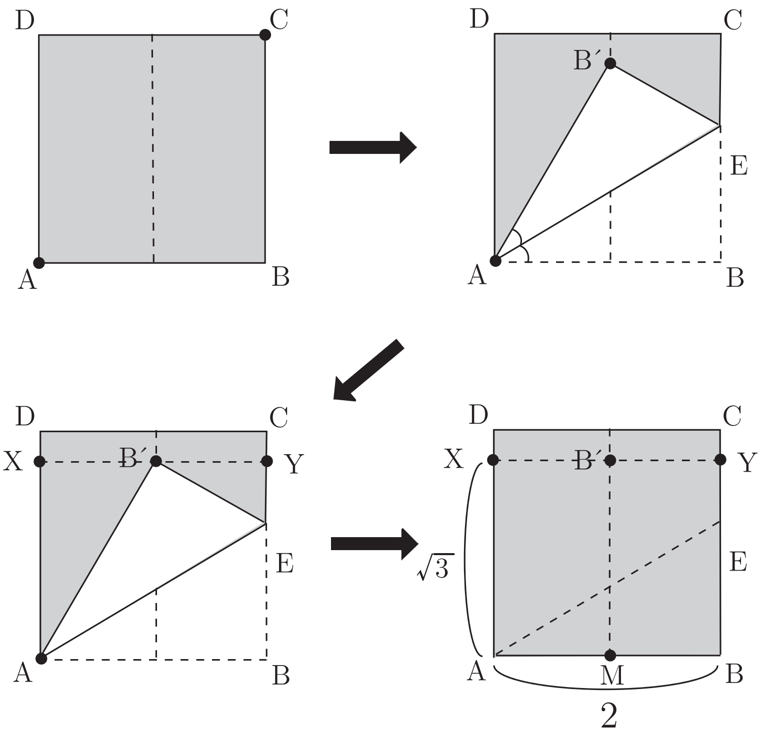


① $\triangle \mathrm{B'MA} \equiv \triangle \mathrm{B'MB}$ である ($\because$ B′M は共通で、M は AB の中点だから MA = MB. さらに、線分 AB と線分 B′M は垂直である)。よって、B′A = B′B である。

② 一方、2 点 B′ と E は、線分 AE で折り返したとき、B と B′ が重なるように決めているので、AB = AB′ である。

③ ①, ②より、AB = AB′ = B′B となる。故に、三角形 $\triangle$B′AB は正三角形である。

3.2. **正方形折り紙で $2:\sqrt{3}$ の比の長方形を作る方法.** 折り紙 (正方形) から次の図のように折っていけば、辺の比が $2:\sqrt{3}$ の長方形を作ることができる。



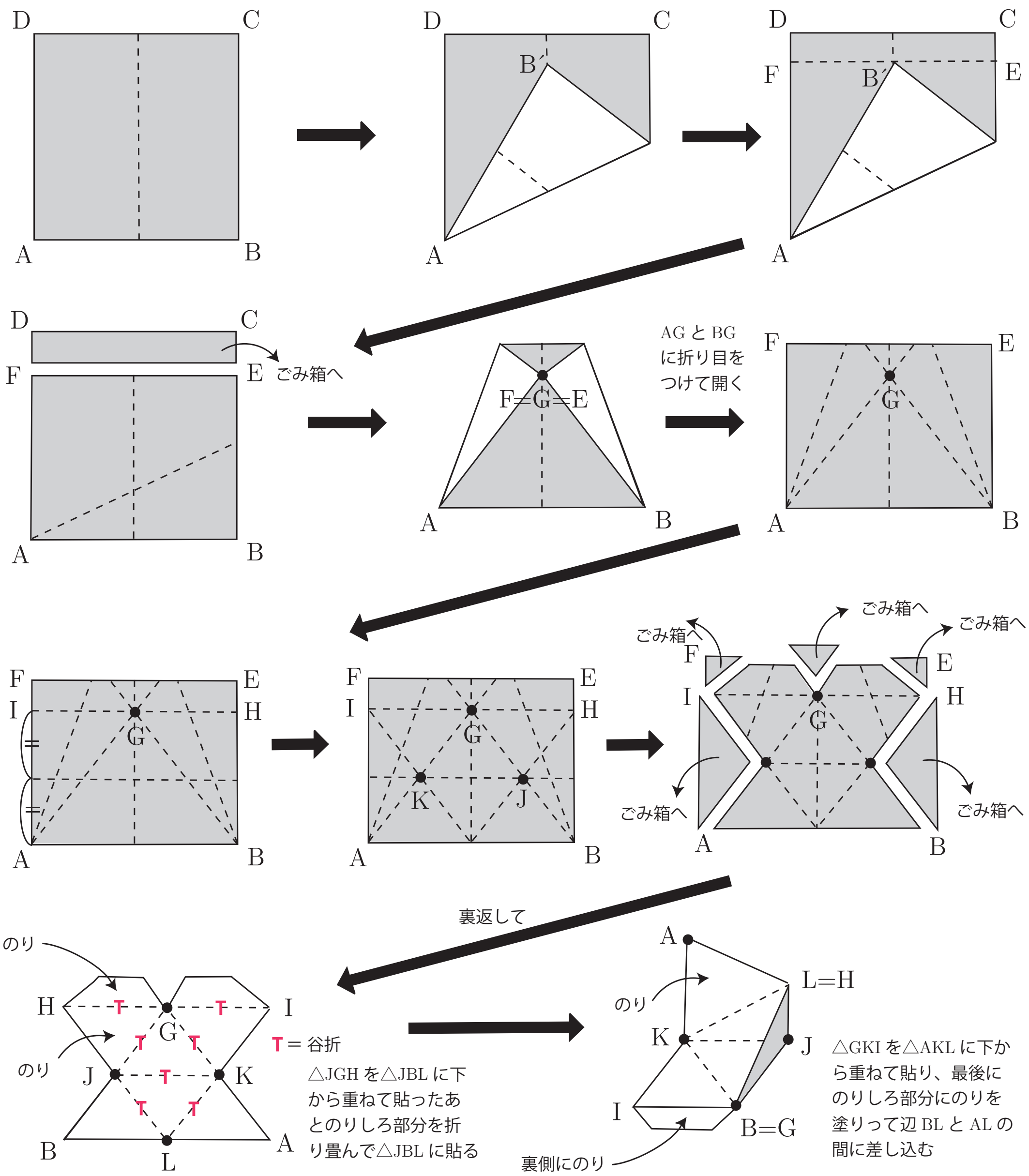
問題 4. 上の折り方で、本当に $2:\sqrt{3}$ の長方形できているのだろうか？

次のステップで考えてみよう。

① 折り紙で正三角形を作成したときと同様に、$\triangle AB'B$ は正三角形である。よって、$\angle B'AB = 60^\circ$ である。

② $\triangle B'AM$ は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。よって、$AM : AX = AM : MB' = 1 : \sqrt{3}$ である。

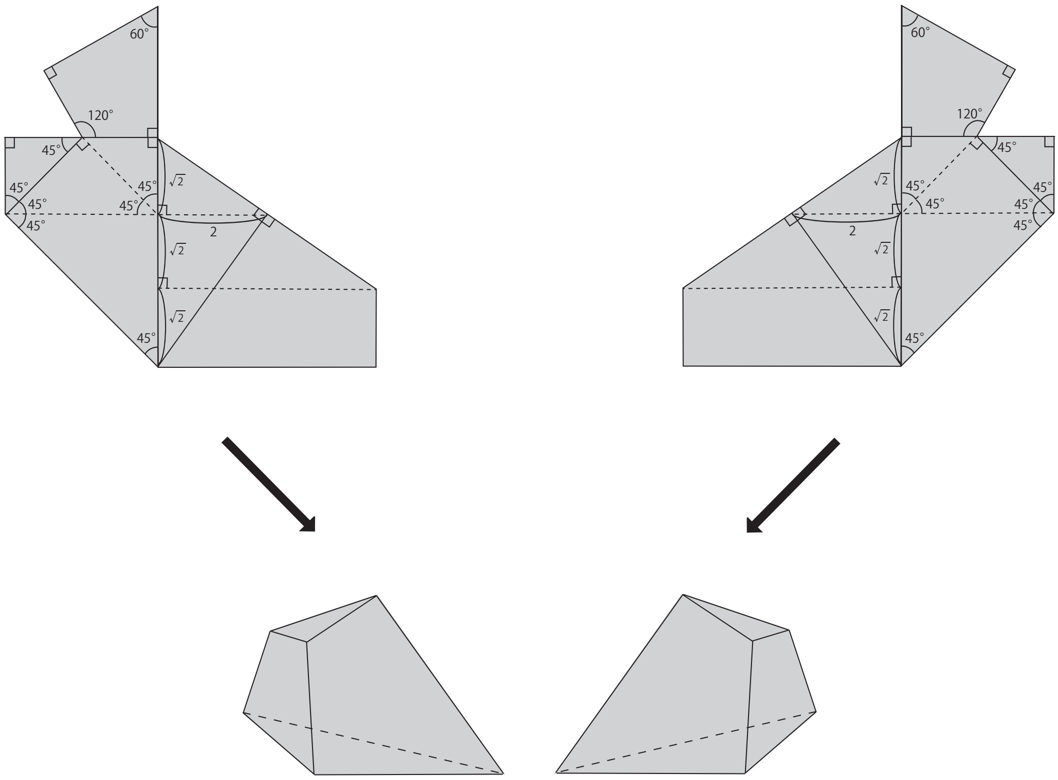
3.3. 斜三角錐の作り方. 折り紙 (正方形) から次の図のように折っていけば、辺の比 $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ の三角形からなる三角錐を作ることができる (のりとはさみが必要)。



実習 5. 作った斜三角錐を 8 個積み重ねて、それが自己相似立体であることをプラバンで作られた斜三角錐の中に入れて確かめよう。一方、正四面体 (= 正三角錐) は自己相似立体ではないことを、プラバンで作られた正四面体の中に入れて確認してみよう。

§4. 補遺：平行多面体を生み出す立体–ペンタドロン–

秋山仁、中川宏、中村義作、佐藤郁郎 [1] らは、平行多面体の族の代表元「立方体」「斜六角柱」「切頂八面体」「菱形十二面体」「長菱形十二面体」のいずれもが**ペンタドロン**と名付けられた 1 種類の凸多面体 (但し、雌雄がある) を充填して作ることができることを発見した。ここで、ペンタドロンとは下図の 2 つの展開図を組み立てることにより得られる 2 つの凸多面体であり (一方を雌、他方を雄と呼ぶ)、これらは鏡像の関係にある。



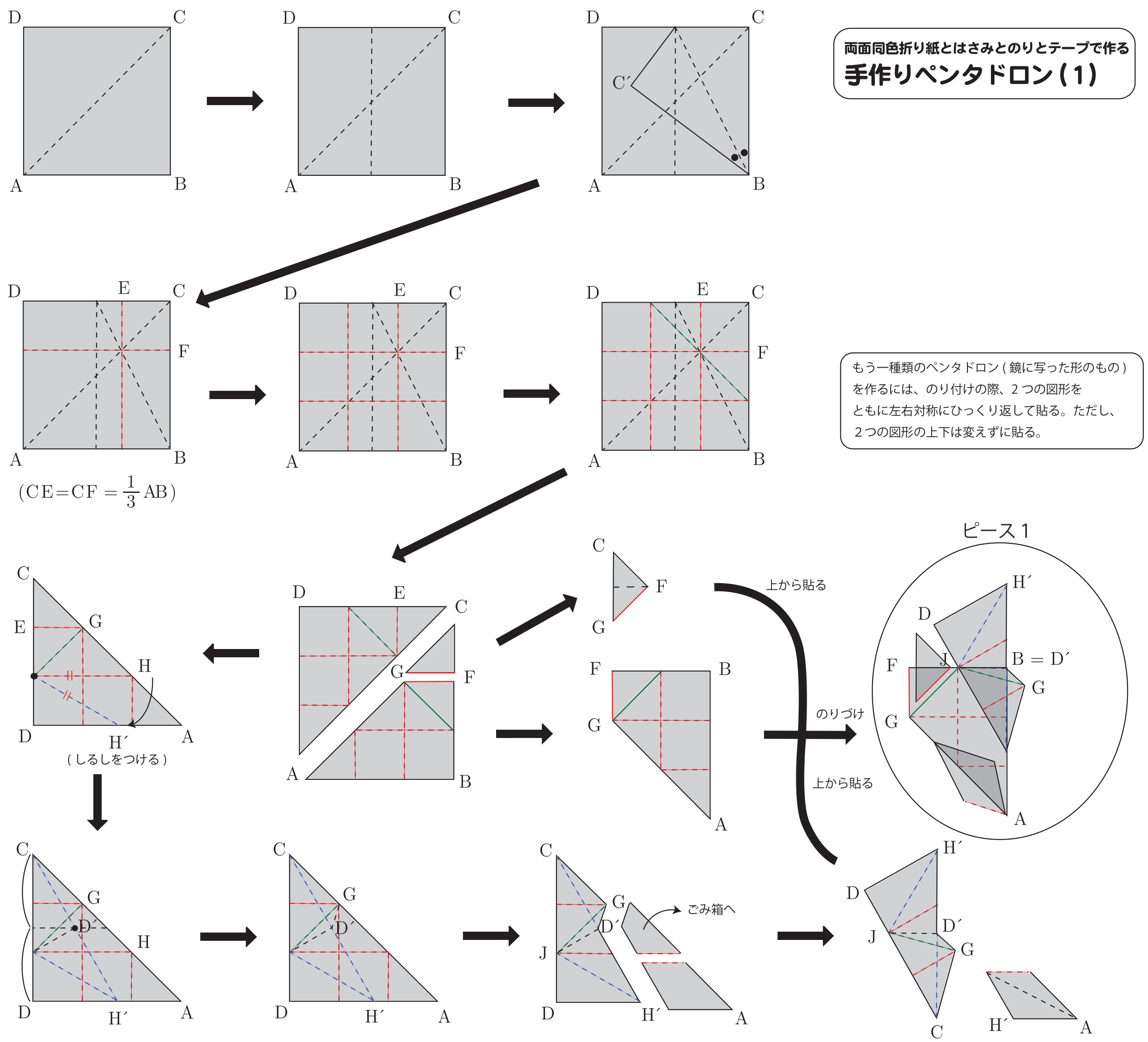
問題 5. ペンタドロンは自己相似立体か？

ペンタドロンを使って前述の 5 種類の平行多面体を作るパズルが木鏡社より市販されているが [15]、次のようにすれば、やや複雑であるが 2 枚の両面同色折り紙 (例えば、ショウワグリム株式会社のタント・カラーペーパーなど) を使ってペンタドロンを作ることができる (但し、はさみとのりのセロハンテープが必要)。

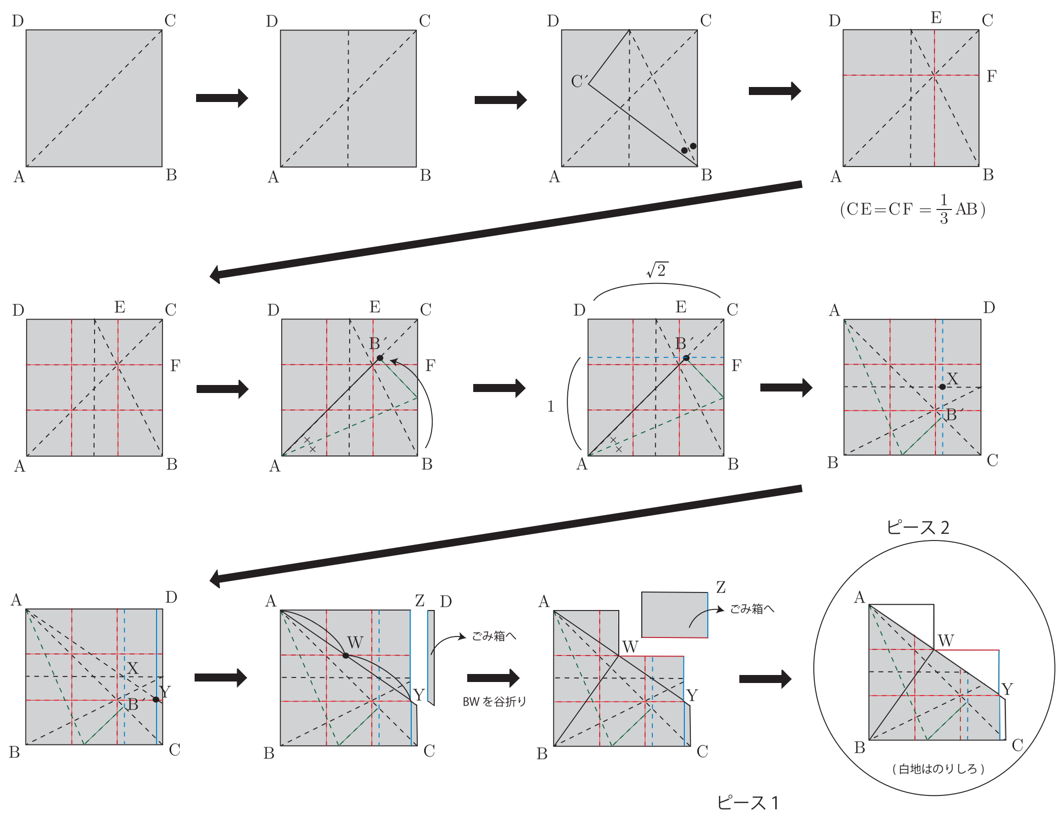
両面同色折り紙とはさみとのりとテープで作る

手作りペンタドロン（1）

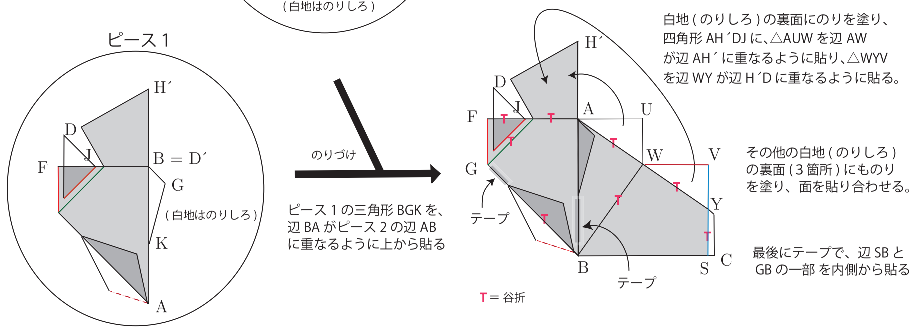
もう一種類のペンタドロン（鏡に写った形のもの）を作るには、のり付けの際、2つの図形をともに左右対称にひっくり返して貼る。ただし、2つの図形の上下は変えずに貼る。

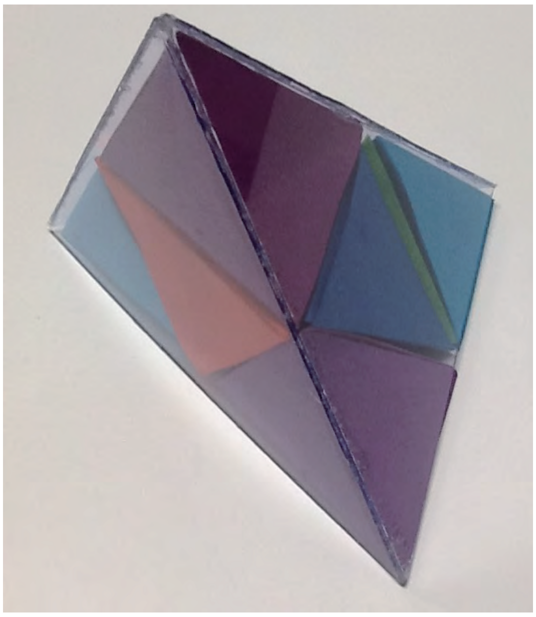


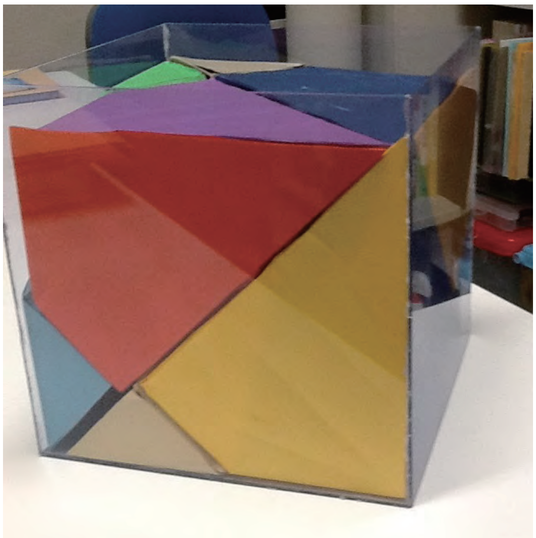
両面同色折り紙とはさみとのりとテープで作る
手作りペンタドロン（2）



もう一種類のペンタドロン（鏡に写った形のもの）を作るには、のり付けの際、２つの図形をともに左右対称にひっくり返して貼る。ただし、２つの図形の上下は変えずに貼る。







References

[1] J.Akiyama, M.Kobayashi, H.Nakagawa, G.Nakamura and I.Sato, "Atoms for parallelohedra", in:"Geometry-intuitive, discrete and convex", Bolyai Society Mathematical Studies 24, Springer, Berlin, 2013, 23–43.

[2] 秋山仁「美の背後に潜む数理」数学通信第 17 巻第 2 号, (2012), 6–18.

[3] 秋山仁「平行多面体とその元素ペンタドロン」数研通信 **84** (2015), 2–5.

[4] E.S.Fedorov, "An indroduction to the theory of figures" (in Russian), Notices of the Imperial Petersburg Mineralogical Society, 2nd Ser., **24** (1885), 1–279. Republished by the Acad. Sci. USSR, Moscow 1953.

[5] B.GRÜNBAUM, "The Bilinski dodecahedron, and assorted parallelohedra, zonohedra, monohedra, isozonohedra and otherhedra", https://digital.lib.washington.edu/researchworks/bitstream/handle/1773/15593/Bilinski_dodecahedron.pdf

[6] 堀井洋子『折り紙と数学のひろば』日本評論社, 2004.

[7] H. MINKOWSKI, "Allgemeine Lehrsätzeüber die konvexe Polyeder" (in German), Nachrichten von der königl. Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1897, 198–219.

[8] 村上一三『美しい多面体–その理論と組み立て方–』明治図書, 1982.

[9] 杉本厚吉『タイリング描法の基本テクニック』 誠文堂新光社, 2009.

[10] 淡中忠郎「タイルの分類」 (数学セミナーリーディングス『数理のひろば』所収) 日本評論社, 1981, 82—90.

[11] 上村文隆「はまぐりの数学–空間充填立体」
http://sky.geocities.jp/bunryu1011/kuukanzyuutenn.html.

[12] 長尾良平「捩じれた話」第 88 回数学教育実践研究会　レポート発表,
http://izumi-math.jp/R_Nagao/88_tower2.pdf.

[13] TAMAMI, 「牛乳の三角パックにこだわることになった経緯」
http://artets.la.coocan.jp/pak/ikisatsu/paktour.htm.

[14] 和久井道久「多面体にまつわる幾何学–オイラーの多面体定理を中心に–」2010,
http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/˜wakui/Euler_formula.pdf.

[15] イメージミッション木鏡社販売のパズル「ペンタドロン」

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science
Kansai University
3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan