

§1. 位相空間

ここでは、位相空間について簡単に述べておこう。位相空間は距離空間の開集合系のみたす性質を一般化し、次のように定められる。

定義 1.1 X を空でない集合、 \mathfrak{D} を X の部分集合系とする。次の (1)~(3) がなりたつとき、 \mathfrak{D} を X の位相という。

- (1) $\emptyset, X \in \mathfrak{D}$.
- (2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{D}$ ならば、 $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$.
- (3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathfrak{D} の元からなる集合族とすると、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{D}$.

このとき、組 (X, \mathfrak{D}) または単に X を位相空間という。また、 X の元を点ともいう。更に、 \mathfrak{D} の元を X の開集合という。また、 \mathfrak{D} を X の開集合系ともいう。

位相空間の例を幾つか挙げよう。

例 1.1 (X, d) を距離空間、 \mathfrak{D} を d により定められる X の開集合系とする。このとき、 \mathfrak{D} は X の位相となる。よって、 (X, \mathfrak{D}) は位相空間である。

逆に、位相空間 (X, \mathfrak{D}) に対して、 X の距離 d が存在し、 d により定められる X の開集合系が \mathfrak{D} と一致する場合がある。このとき、 (X, \mathfrak{D}) または単に \mathfrak{D} は d により距離付け可能であるという。

例 1.2 (密着空間) X を空でない集合とする。このとき、 X の部分集合系 $\{\emptyset, X\}$ は X の位相となる。この位相を密着位相という。密着位相を考えた位相空間 $(X, \{\emptyset, X\})$ を密着位相空間または単に密着空間という。

2個以上の点を含む密着空間は距離付け可能ではない。実際、 X を2個の点 p, q を含み、距離 d により距離付け可能な密着空間であると仮定すると、 p の $\frac{1}{2}d(p, q)$ 近傍は p を含むが q は含まない X の開集合となり、これは密着空間の開集合が \emptyset と X のみであることに矛盾するからである。

例 1.3 (離散空間) X を空でない集合とする。このとき、 X の中集合 2^X は X の位相となる。この位相を離散位相という。離散位相を考えた位相空間 $(X, 2^X)$ を離散位相空間または単に離散空間という。離散空間は離散距離により距離付け可能である。

距離空間の空でない部分集合は距離を制限することにより、部分距離空間という距離空間となるのであった。このことは一般の位相空間の部分集合に対して、次のように一般化することができる。

定理 1.1 (X, \mathfrak{D}) を位相空間とし、 $A \subset X, A \neq \emptyset$ とする。このとき、 A の部分集合系 \mathfrak{D}_A を

$$\mathfrak{D}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathfrak{D}\}$$

により定めると、次の (1)~(3) がなりたつ。特に、 \mathfrak{D}_A は A の位相となる。

- (1) $\emptyset, A \in \mathfrak{D}_A$.
- (2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{D}_A$ ならば、 $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}_A$.
- (3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathfrak{D}_A の元からなる集合族とすると、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{D}_A$.

定理 1.1 において、 \mathfrak{D}_A を A の \mathfrak{D} に関する相対位相、組 (A, \mathfrak{D}_A) を X の部分位相空間または単に部分空間という。位相空間の部分集合の位相については相対位相を考えることが多い。

距離空間の点列の収束は開集合を用いて特徴付けることができる。このことに注目すると、一般の位相空間に対しても点列の収束を考えることができる。

定義 1.2 (X, \mathcal{O}) を位相空間とする.

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n \in X$ が対応しているとき, これを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表し, X の点列という. ただし, \mathbf{N} は自然数全体の集合である.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $a \in X$ とする. $a \in O$ となる任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in O$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するという. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ または $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) と表し, a を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限という.

注意 1.1 距離空間の点列の極限は一意的であったが, 一般の位相空間の場合はそうとは限らない. 例えば, 密着空間の任意の点列は任意の点に収束する.

距離空間の場合と同様に, 位相空間についても閉集合を考えることができる.

定義 1.3 X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. $X \setminus A$ が X の開集合のとき, A を X の閉集合という.

例 1.4 X を位相空間とする. このとき, \emptyset および X は X の開集合でも閉集合でもある.

更に, 距離空間に対する様々な概念は一般の位相空間に対しても考えることができる. まず, 内点と近傍を定義しよう.

定義 1.4 X を位相空間とし, $x \in X$, $U \subset X$ とする.

X のある開集合 O が存在し, $x \in O \subset U$ となるとき, x を U の内点という.

x が U の内点のとき, U を x の近傍という. X の開集合または閉集合となる近傍をそれぞれ開近傍, 閉近傍ともいう.

例 1.5 X を位相空間, O を X の空でない開集合とし, $x \in O$ とする. このとき, x は O の内点である. また, O は x の開近傍である.

次に, 内部, 外点, 外部, 境界点, 境界を順に定義しよう. X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, A の内点全体の集合を A^i または $\overset{\circ}{A}$ と表し, A の内部という. 定義より,

$$A^i = \bigcup \{O \subset A \mid O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

がなりたつ. 特に, 開集合の性質より, A^i は A に含まれる X の最大の開集合である. また, A が X の開集合であるための必要十分条件は $A^i = A$ である.

$(X \setminus A)^i$ の点を A の外点という. また, A の外点全体の集合, すなわち, $(X \setminus A)^i$ を A^e と表し, A の外部という. X を全体集合とすると, A の外点とは A^c の内点のことであり, $A^e = (A^c)^i$ である. また, 定義より, A^e は X の開集合である.

A の内点でも外点でもない点を A の境界点という. また, A の境界点全体の集合を ∂A と表し, A の境界という.

内部, 外部, 境界の定義より, X は互いに素である部分集合 $A^i, A^e, \partial A$ の和集合となる. すなわち,

$$X = A^i \sqcup A^e \sqcup \partial A$$

と表すことができる. 特に, A^i および A^e が X の開集合であることより, ∂A は X の閉集合となる.

更に, 閉包, 触点を定義しよう. X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. A を含む最小の閉集合を \bar{A} と表し, A の閉包という. すなわち,

$$\bar{A} = \bigcap \{F \supset A \mid F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$$

である. \bar{A} の点を A の触点という. 特に, A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\bar{A} = A$ である.

X を全体集合とすると, \bar{A} は A の補集合の内部の補集合あるいは A の外部の補集合, すなわち,

$$\bar{A} = \left((A^c)^i \right)^c = (A^e)^c$$

である.

距離空間の間の連続写像のみたす性質に注目し, 位相空間の間の写像の連続性を定めることができる.

定義 1.5 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とする.

$a \in X$ とする. $f(a) \in O$ となる Y の任意の開集合 O に対して, $a \in O' \subset f^{-1}(O)$ となる X の開集合 O' が存在するとき, f は a で連続であるという.

f が任意の $a \in X$ で連続なとき, f は連続であるという.

特に, \mathbf{R} や \mathbf{C} への連続写像を連続関数ともいう. ただし, \mathbf{R}, \mathbf{C} はそれぞれ実数全体, 複素数全体の集合である.

注意 1.2 定義 1.5 において, f の連続性に対する条件は, それと同値な「任意の $a \in X$ に対して, f による $f(a)$ の任意の近傍の逆像が a の近傍となる」とすることもある.

距離空間の場合と同様に, 位相空間の間の写像の合成に関して, 次がなりたつ.

定理 1.2 X, Y, Z を位相空間, f を X から Y への写像, g を Y から Z への写像とする. f が a で連続であり, g が $f(a)$ で連続ならば, 合成写像 $g \circ f$ は a で連続である.

特に, f, g が連続ならば, $g \circ f$ は連続である.

また, 次についても距離空間の場合と同様である.

定理 1.3 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とすると, 次の (1)~(4) は同値である.

- (1) f は連続である.
- (2) f による Y の任意の開集合の逆像は X の開集合である.
- (3) f による Y の任意の閉集合の逆像は X の閉集合である.
- (4) 任意の $A \subset X$ に対して, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

注意 1.3 定理 1.3 より, 位相空間 X から位相空間 Y への写像 f の連続性に対する条件は, 定義 1.5 で述べたものの代わりに, 定理 1.3 の (2)~(4) の条件のどれを用いてもよい.

連続写像の例を幾つか挙げよう.

例 1.6 離散空間から任意の位相空間への任意の写像は連続である.

例 1.7 任意の位相空間から密着空間への任意の写像は連続である.

例 1.8 (定値写像) X, Y を位相空間とし, $y_0 \in Y$ を固定しておく. このとき, X から Y への写像 f を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める. この f を定値写像という. 定値写像は連続である.

問題 1

1. 次の問に答えよ.

- (1) (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である, すなわち, ある $M > 0$ が存在し, 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して, $d(a_m, a_n) \leq M$ となることを示せ.
- (2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である, すなわち, ある $M > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $|a_n| \leq M$ となることを示せ.
- (3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ $a, b \in \mathbf{R}$ に収束する実数列とする. このとき, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束することを示せ.

2. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, f を X から Y への写像とする. ある $L > 0$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

となるならば, f は連続であることを示せ. なお, 上の条件をみたす f は Lipschitz 連続であるという.

3. (X, \mathcal{D}) を位相空間とし, $A \subset X, A \neq \emptyset$ とする. このとき, A の \mathcal{D} に関する相対位相 \mathcal{D}_A を考える. 更に, $B \subset A$ とする.

- (1) A が X の開集合であり, B が A の開集合ならば, B は X の開集合であることを示せ.
- (2) A が X の閉集合であり, B が A の閉集合ならば, B は X の閉集合であることを示せ.

問題 1 の解答

1. (1) $a \in X$ とし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束すると仮定する. このとき, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$d(a_n, a) < 1$$

となる. ここで, $M > 0$ を

$$M = 2 \max\{d(a_1, a), d(a_2, a), \dots, d(a_{N-1}, a), 1\}$$

により定める. このとき, 三角不等式より, 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d(a_m, a) + d(a, a_n) \\ &= d(a_m, a) + d(a_n, a) \\ &\leq \max\{d(a_1, a), d(a_2, a), \dots, d(a_{N-1}, a), 1\} \\ &\quad + \max\{d(a_1, a), d(a_2, a), \dots, d(a_{N-1}, a), 1\} \\ &= M, \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(a_m, a_n) \leq M$$

である. よって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

- (2) (1) より, ある $M' > 0$ が存在し, 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$|a_m - a_n| \leq M'$$

である. ここで, $M > 0$ を

$$M = M' + |a_1|$$

により定める. このとき, 三角不等式より, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - a_1) + a_1| \\ &\leq |a_n - a_1| + |a_1| \\ &\leq M' + |a_1| \\ &= M, \end{aligned}$$

すなわち, $|a_n| \leq M$ である.

- (3) まず, (2) より, ある $M > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $|a_n| \leq M$ となる.

次に, $\varepsilon > 0$ とする. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するから, ある $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_1$ ならば,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}$$

となる. 同様に, ある $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_2$ ならば,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}$$

となる. ここで, $N \in \mathbf{N}$ を

$$N = \max\{N_1, N_2\}$$

により定める. このとき, 三角不等式および上の2式より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M + |b|} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{M + |b|} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(a_n b_n, ab) < \varepsilon$$

である. よって, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ab に収束する.

2. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とし, $\delta > 0$ を $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ により定める. 仮定より, $x \in X$, $d_X(x, a) < \delta$ ならば,

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(a)) &\leq L d_X(x, a) \\ &< L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

である. よって, f は a で連続である. 更に, a は任意だから, f は連続である.

3. (1) B は A の開集合だから, $B = O \cap A$ となる $O \in \mathfrak{D}$ が存在する. 更に, A は X の開集合, すなわち, $A \in \mathfrak{D}$ である. よって, $B \in \mathfrak{D}$, すなわち, B は X の開集合である.

(2) B は A の閉集合だから, $A \setminus B$ は A の開集合である. よって,

$$A \setminus B = O \cap A$$

となる $O \in \mathfrak{D}$ が存在する. 更に, $B \subset A$ だから,

$$(X \setminus A) \cap B = \emptyset$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} X \setminus B &= ((X \setminus A) \cup A) \setminus B \\ &= ((X \setminus A) \setminus B) \cup (A \setminus B) \\ &= (X \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= (X \setminus A) \cup (O \cap A) \\ &= ((X \setminus A) \cup O) \cap ((X \setminus A) \cup A) \\ &= ((X \setminus A) \cup O) \cap X \\ &= (X \setminus A) \cup O \end{aligned}$$

である. ここで, A は X の閉集合だから, $X \setminus A \in \mathfrak{D}$ である. また, $O \in \mathfrak{D}$ である. よって, $X \setminus B \in \mathfrak{D}$, すなわち, B は X の閉集合である.