§3. Banach 空間

ここでは, Banach 空間について述べよう．まず, 距離空間の Cauchy 列に関して, 次のように定める．

定義 3.1 (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を X の点列とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば, $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を Cauchy 列という．

距離空間の収束する点列は Cauchy 列であることが分かる．しかし, Cauchy 列は必ずしも収束するとは限らない．そこで, 次のように定める．

定義 3.2 任意の Cauchy 列が収束する距離空間は完備であるという．また, 完備なノルム空間を Banach 空間という．

注意 3.1 V を内積空間とする．例 2.1 で述べたように, V はノルム空間となる．V が完備となるとき, V を Hilbert 空間という．

例 3.1 (Euclid 空間) Euclid 空間 $(\mathbf{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ を考える．ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^n$ の標準内積である．このとき, 例 2.1 より, $\mathbf{R}^n$ はノルム空間となる．更に, このノルムは Euclid 距離 d を定める．微分積分でも学ぶように, $\mathbf{R}^n$ は d に関して完備である．よって, $\mathbf{R}^n$ は Hilbert 空間である．

次に示すように, 例 2.2 のノルム空間 $C[0,1]$ は Banach 空間となる．

定理 3.1 $C[0,1]$ は完備である．

証明 次の (1)〜(3) の手順により示す．

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $C[0,1]$ の Cauchy 列とし, $t \in [0,1]$ とする．このとき, 実数列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ は収束する．

(2) (1) より, $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ とおき, 関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ を定めることができる．このとき, $f \in C[0,1]$ である．

(3) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に収束する．

(1): $\varepsilon > 0$ とする．$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C[0,1]$ の Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$d(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる．よって, $t \in [0,1]$ とすると, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |f_m(t) - f_n(t)| &\leq d(f_m, f_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{$*$}$$

となる．したがって, $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列である．$\mathbf{R}$ は完備だから, $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ は収束する．

(2): $(*)$ において, $n = N$, $m \to \infty$ とすると,

$$|f(t) - f_N(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

である. $t_0 \in [0,1]$ とすると, f_N は連続だから, ある $\delta > 0$ が存在し, $t \in [0,1]$, $|t - t_0| < \delta$ ならば,

$$|f_N(t) - f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる. よって, $t \in [0,1]$ とすると, $|t - t_0| < \delta$ ならば,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

となる. したがって, f は $t = t_0$ で連続である. t_0 は任意だから, $f \in C[0,1]$ である.
(3): $t \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ とすると,

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq |f_n(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

である. よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &< \frac{2}{3}\varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(f_n, f) < \varepsilon$$

である. したがって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に収束する. □

例 3.2 多項式として表される $C[0,1]$ の元全体の集合を X とする. このとき, X は $C[0,1]$ の部分空間となる. 更に, $C[0,1]$ のノルム $\|\ \|$ の X への制限は X のノルムを定める. しかし, X は完備ではない. 実際, 例えば, $[0,1]$ で定義された C^{∞} 級関数は Taylor の定理より, 多項式で近似することができるからである.

また, 問題 2-1 のノルム空間 l^p は Banach 空間となる.

定理 3.2 l^p は完備である.

証明 次の (1)〜(3) の手順により示す.

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を l^p の Cauchy 列とし, $i \in \mathbf{N}$ とする. $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ と表しておくと, 実数列 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

(2) (1) より, $\xi_i = \lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)}$ とおき, 実数列 $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ を定めることができる. このとき, $x \in l^p$ である.

(3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束する.

(1): $\varepsilon > 0$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は l^p の Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m,\, n \in \mathbf{N}$, $m,\, n \geq N$ ならば,

$$\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon$$

となる. よって, $i \in \mathbf{N}$ とすると, $m,\, n \in \mathbf{N}$, $m,\, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x_m - x_n\|_p \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon$$

となる. したがって, $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列である. $\mathbf{R}$ は完備だから, $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は収束する.
(2): $k \in \mathbf{N}$ とすると, $m,\, n \in \mathbf{N}$, $m,\, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|x_m - x_n\|_p \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\left(\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

となる. よって, $n = N$, $m \to \infty$ とすると,

$$\left(\sum_{j=1}^k |\xi_j - \xi_j^{(N)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \tag{$**$}$$

である. 更に, Minkowski の不等式より,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^k |\xi_j - \xi_j^{(N)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(N)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + \|x_N\|_p, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\left(\sum_{j=1}^k |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + \|x_N\|_p$$

である. したがって, $k \to \infty$ とすると, $\|x\|_p < +\infty$ となり, $x \in l^p$ である.
(3): $(**)$ において, $k \to \infty$ とすればよい. $\square$

問題 3

1. 集合 l^∞ を

$$l^\infty = \{\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \mid \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \text{ は } \sup\{|\xi_n| \mid n \in \mathbf{N}\} < +\infty \text{ となる実数列}\}$$

により定める.

(1) $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ とする. 実数列 $x + y$ を

$$x + y = \{\xi_n + \eta_n\}_{n=1}^\infty$$

により定めると, $x + y \in l^\infty$ であることを示せ.

(2) $c \in \mathbf{R}$, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ とする. 実数列 cx を

$$cx = \{c\xi_n\}_{n=1}^\infty$$

により定めると, $cx \in l^\infty$ であることを示せ.

更に, l^∞ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる.

(3) $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ に対して,

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_n| \mid n \in \mathbf{N}\}$$

とおく. $\|\ \|_\infty$ は l^∞ のノルムとなることを示せ.

(4) ノルム空間 $(l^\infty, \|\ \|_\infty)$ は完備であることを示せ.

2. V, W を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in V \times W$, $c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$$

とおくと, $V \times W$ はベクトル空間となることが分かる. 更に, $\|\ \|_V$, $\|\ \|_W$ をそれぞれ V, W のノルムとする. $(x, y) \in V \times W$ に対して,

$$\|(x, y)\|_{V \times W} = \|x\|_V + \|y\|_W$$

とおくと, $\|\ \|_{V \times W}$ は $V \times W$ のノルムとなることが分かる.

$(V, \|\ \|_V)$, $(W, \|\ \|_W)$ が完備ならば, $(V \times W, \|\ \|_{V \times W})$ は完備であることを示せ.

問題 3 の解答

1. (1) $x,\, y \in l^\infty$ および絶対値に対する三角不等式より,

$$\begin{aligned}\sup\{|\xi_n + \eta_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} &\leq \sup\{|\xi_n| + |\eta_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} \\ &\leq \sup\{|\xi_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} + \sup\{|\eta_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

である. よって, $x + y \in l^\infty$ である.

(2) $x \in l^\infty$ より,

$$\begin{aligned}\sup\{|c\xi_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} &= \sup\{|c||\xi_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} \\ &= |c| \sup\{|\xi_n| \,|\, n \in \mathbf{N}\} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

である. よって, $cx \in l^\infty$ である.

(3) まず, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ とする. $\|\ \|_\infty$ の定義より, $\|x\|_\infty \geq 0$ である. また, $\|x\|_\infty = 0$ となるのは x のすべての項が 0 となるとき, すなわち, x が l^∞ の零ベクトルのときである.

次に, $c \in \mathbf{R}$, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ とする. このとき, (2) の計算より,

$$\|cx\|_\infty = |c|\|x\|_\infty$$

である.

更に, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ とする. このとき, (1) の計算より,

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

である.

よって, $\|\ \|_\infty$ は l^∞ のノルムとなる.

(4) 次の (a)〜(c) の手順により示せばよい.

(a) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を l^∞ の Cauchy 列とし, $i \in \mathbf{N}$ とする. $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^\infty$ と表しておくと, 実数列 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は収束する.

(b) (a) より, $\xi_i = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)}$ とおき, 実数列 $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ を定めることができる. このとき, $x \in l^\infty$ である.

(c) $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は x に収束する.

(a): $\varepsilon > 0$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は l^∞ の Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m,\, n \in \mathbf{N}$, $m,\, n \geq N$ ならば,

$$\|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon$$

となる. よって, $i \in \mathbf{N}$ とすると, $m,\, n \in \mathbf{N}$, $m,\, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned}|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| &\leq \sup\{|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| \,|\, j \in \mathbf{N}\} \\ &= \|x_m - x_n\|_\infty \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

すなわち,

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon \tag{i}$$

となる. したがって, $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列である. $\mathbf{R}$ は完備だから, $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

(b): (i) において, $n = N$, $m \to \infty$ とすると,

$$|\xi_i - \xi_i^{(N)}| \le \varepsilon \tag{ii}$$

である. よって, 絶対値に対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} |\xi_i| &\le |\xi_i - \xi_i^{(N)}| + |\xi_i^{(N)}| \\ &\le \varepsilon + \|x_N\|_\infty, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|\xi_i| \le \varepsilon + \|x_N\|_\infty$$

である. したがって,

$$\sup\{|\xi_i| \mid i \in \mathbf{N}\} \le \varepsilon + \|x_N\|_\infty$$

となり, $x \in l^\infty$ である.

(c): (ii) より, 明らかである.

2. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を $V \times W$ の Cauchy 列とし, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, ある $N \in \mathbf{N}$ $m, n \in \mathbf{N}$, が存在し, $m, n \ge N$ ならば,

$$\|z_m - z_n\|_{V\times W} < \frac{1}{3}\varepsilon$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\|_{V\times W} &= \|(x_m - x_n, y_m - y_n)\|_{V\times W} \\ &= \|x_m - x_n\|_V + \|y_m - y_n\|_W \end{aligned}$$

だから, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \ge N$ ならば,

$$\|x_m - x_n\|_V,\ \|y_m - y_n\|_W < \frac{1}{3}\varepsilon$$

である. よって, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ V, W の Cauchy 列である. 更に, V, W は完備だから, ある $x \in V$, $y \in W$ が存在し, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ x, y に収束する. したがって, $z = (x, y)$ とおくと, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge N$ ならば,

$$\begin{aligned} \|z_n - z\|_{V\times W} &= \|x_n - x\|_V + \|y_n - y\|_W \\ &\le \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\|z_n - z\|_{V\times W} < \varepsilon$$

となり, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は z に収束する. 以上より, $V \times W$ は完備である.