

## §4. 一様収束位相

例2.2のノルム空間  $(C[0, 1], \|\cdot\|)$  を次のように一般化しよう.  $X$  を位相空間とし,  $X$  で定義された実数値連続関数全体の集合を  $C(X)$  と表す.  $f, g \in C(X)$  に対して,  $f$  と  $g$  の和  $f+g: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in X)$$

により定める. また,  $f \in C(X)$ ,  $c \in \mathbf{R}$  に対して,  $f$  の  $c$  によるスカラー倍  $cf: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$(cf)(x) = cf(x) \quad (x \in X)$$

により定める. このとき, 次がなりたつ.

**定理 4.1**  $f+g, cf \in C(X)$  である.

**証明** まず,  $a \in X$  とし,  $U$  を  $(f+g)(a)$  の近傍とする. 近傍の定義より, ある  $\varepsilon > 0$  が存在し,

$$B((f+g)(a); \varepsilon) \subset U$$

となる. ただし,  $x \in \mathbf{R}$  に対して,  $B(x; \varepsilon)$  は  $x$  の  $\varepsilon$  近傍を表す. 更に,

$$O_1 = f^{-1}\left(B\left(f(a); \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

とおく.  $f \in C(X)$  より,  $O_1$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合である. 同様に,

$$O_2 = g^{-1}\left(B\left(g(a); \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

とおくと,  $O_2$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合である. ここで,  $x \in O_1 \cap O_2$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\ &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (f+g)^{-1}(B((f+g)(a); \varepsilon))$$

である. よって,

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &\subset (f+g)^{-1}(B((f+g)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (f+g)^{-1}(U), \end{aligned}$$

すなわち,

$$O_1 \cap O_2 \subset (f+g)^{-1}(U)$$

である.  $O_1 \cap O_2$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合だから,  $(f+g)^{-1}(U)$  は  $a$  の近傍である. したがって,  $f+g$  は  $a$  で連続である.  $a$  は任意だから,  $f+g$  は連続, すなわち,  $f+g \in C(X)$  である.

次に,  $a \in X$  とし,  $U$  を  $(cf)(a)$  の近傍とする. 近傍の定義より, ある  $\varepsilon > 0$  が存在し,

$$B((cf)(a); \varepsilon) \subset U$$

となる. 更に,

$$O = f^{-1} \left( B \left( f(a); \frac{\varepsilon}{1 + |c|} \right) \right)$$

とおく.  $f \in C(X)$  より,  $O$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合である. ここで,  $x \in O$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} |(cf)(x) - (cf)(a)| &= |cf(x) - cf(a)| \\ &= |c||f(x) - f(a)| \\ &\leq |c| \frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (cf)^{-1}(B((cf)(a); \varepsilon))$$

である. よって,

$$\begin{aligned} O &\subset (cf)^{-1}(B((cf)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (cf)^{-1}(U), \end{aligned}$$

すなわち,

$$O \subset (cf)^{-1}(U)$$

である.  $O$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合だから,  $(cf)^{-1}(U)$  は  $a$  の近傍である. したがって,  $cf$  は  $a$  で連続である.  $a$  は任意だから,  $cf$  は連続, すなわち,  $cf \in C(X)$  である.  $\square$

$C(X)$  に一様収束位相という位相を定めよう. まず,  $f, g \in C(X)$  に対して,

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

とおく. ただし,  $\mathbf{R}$  の部分集合

$$\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

が上に有界ではない場合は

$$d(f, g) = +\infty$$

と定める. 特に,

$$0 \leq d(f, g) \leq +\infty$$

である. 更に,  $f \in C(X)$ ,  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$B(f; \varepsilon) = \{g \in C(X) \mid d(f, g) < \varepsilon\}$$

とおく.

**注意 4.1** 任意の開被覆が有限部分被覆をもつ位相空間はコンパクトであるというのであった. 例えば,  $[0, 1]$  はコンパクトである. 更に, コンパクト空間で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ. よって,  $X$  がコンパクトならば, 上で定めた  $d$  は  $C(X)$  の距離となることが分かる. また,  $B(f; \varepsilon)$  は距離空間  $(C(X), d)$  における  $f$  の  $\varepsilon$  近傍となる. 更に, 定理 3.1 と同様に,  $C(X)$  は完備となる.

さて,  $C(X)$  の部分集合系  $\mathfrak{D}$  を

$$\mathfrak{D} = \{O \subset C(X) \mid \text{任意の } f \in O \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在し, } B(f; \varepsilon) \subset O\}$$

により定める. このとき, 次がなりたつ.

**定理 4.2**  $\mathfrak{D}$  は  $C(X)$  の位相を定める.

**証明** まず,  $\emptyset, C(X) \in \mathfrak{D}$  は明らかである.

次に,  $O_1, O_2 \in \mathfrak{D}$  とする.  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$  のとき,  $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$  である.  $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$  のとき,  $f \in O_1 \cap O_2$  とする. このとき,  $f \in O_1, f \in O_2$  である.  $\mathfrak{D}$  の定義および  $f \in O_1$  より, ある  $\varepsilon_1 > 0$  が存在し,

$$B(f; \varepsilon_1) \subset O_1$$

となる. 同様に, ある  $\varepsilon_2 > 0$  が存在し,

$$B(f; \varepsilon_2) \subset O_2$$

となる. ここで,

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

とおくと,  $\varepsilon > 0$  であり,

$$\begin{aligned} B(f; \varepsilon) &\subset B(f; \varepsilon_1) \cap B(f; \varepsilon_2) \\ &\subset O_1 \cap O_2, \end{aligned}$$

すなわち,

$$B(f; \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$$

である. よって,  $\mathfrak{D}$  の定義より,  $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$  である.

更に,  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\mathfrak{D}$  の元からなる集合族とし,  $f \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  とする. このとき, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  が存在し,  $f \in O_{\lambda_0}$  となる. よって,  $\mathfrak{D}$  の定義より, ある  $\varepsilon > 0$  が存在し,

$$\begin{aligned} B(f; \varepsilon) &\subset O_{\lambda_0} \\ &\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \end{aligned}$$

となる. したがって,  $\mathfrak{D}$  の定義より,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{D}$  である.

以上より,  $\mathfrak{D}$  は  $C(X)$  の位相を定める. □

**定義 4.1**  $\mathfrak{D}$  を  $C(X)$  の一様収束位相という.

**注意 4.2**  $X$  がコンパクトならば,  $C(X)$  の一様収束位相は距離  $d$  から定まる位相に一致する.

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を  $C(X)$  の点列とし,  $f \in C(X)$  とする. 一様収束位相の定義より,  $C(X)$  の点列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が一様収束位相に関して  $f$  に収束するとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $N \in \mathbf{N}$  が存在し,  $n \in \mathbf{N}, n \geq N$  ならば  $f_n \in B(f; \varepsilon)$  となることに他ならない. このとき,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $f$  に一様収束するという. 例えば,  $X = [0, 1]$  の場合, 一様収束するという概念は微分積分で学ぶものと同じである.

## 問題 4

1.  $X$  を位相空間とし,  $f, g \in C(X)$  に対して,  $fg: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad (x \in X)$$

により定める. このとき,  $fg \in C(X)$  であることを示せ.

2. 関数  $\| \cdot \|_1: C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

により定める.

(1)  $\| \cdot \|_1$  は三角不等式をみたすことを示せ. 更に,  $\| \cdot \|_1$  は  $C[0, 1]$  のノルムとなることが分かる.

(2)  $C[0, 1]$  の点列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ (n+1)(t - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}), \\ 1 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} < t \leq 1) \end{cases}$$

により定める. また,  $\| \cdot \|_1$  が定める距離を  $d_1$  とおく.  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $d_1$  に関して Cauchy 列であることを示せ.

(3) (2) の  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  は  $d_1$  に関して収束しないことを示せ. 特に,  $(C[0, 1], d_1)$  は完備ではない.

## 問題4の解答

1.  $a \in X$  とし,  $U$  を  $(fg)(a)$  の近傍とする. 近傍の定義より, ある  $\varepsilon > 0$  が存在し,

$$B((fg)(a); \varepsilon) \subset U$$

となる. 更に,

$$O_1 = f^{-1} \left( B \left( f(a); \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \right\} \right) \right)$$

とおく.  $f \in C(X)$  より,  $O_1$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合である. 同様に,

$$O_2 = g^{-1} \left( B \left( g(a); \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \right\} \right) \right)$$

とおくと,  $O_2$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合である. ここで,  $x \in O_1 \cap O_2$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\ &= |(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))| \\ &= |(f(x) - f(a))\{(g(x) - g(a)) + g(a)\} + f(a)(g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)| \\ &\quad + |f(a)||g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} |g(a)| \\ &\quad + |f(a)| \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (fg)^{-1}(B((fg)(a); \varepsilon))$$

である. よって,

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &\subset (fg)^{-1}(B((fg)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (fg)^{-1}(U), \end{aligned}$$

すなわち,

$$O_1 \cap O_2 \subset (fg)^{-1}(U)$$

である.  $O_1 \cap O_2$  は  $a$  を含む  $X$  の開集合だから,  $(fg)^{-1}(U)$  は  $a$  の近傍である. したがって,  $fg$  は  $a$  で連続である.  $a$  は任意だから,  $fg$  は連続, すなわち,  $fg \in C(X)$  である.

2. (1)  $f, g \in C[0, 1]$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \int_0^1 |(f + g)(t)| dt \\ &= \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt \\ &= \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1, \end{aligned}$$

すなわち,

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

である. よって,  $\|\cdot\|_1$  は三角不等式をみたす.

- (2)  $\varepsilon > 0$  とする. このとき, ある  $N \in \mathbf{N}$  が存在し,  $\frac{1}{N} < \varepsilon$  となる.  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $m, n \geq N$  とすると, 三角形の面積を計算することにより,

$$\begin{aligned} d_1(f_m, f_n) &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &< \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \right) \\ &= \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(f_m, f_n) < \varepsilon$$

である. よって,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列である.

- (3) 背理法により示す.

ある  $f \in C[0, 1]$  が存在し,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $d_1$  に関して  $f$  に収束すると仮定する.  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  をみたす  $\delta$  を任意に選んでおく. このとき, ある  $N \in \mathbf{N}$  が存在し,  $\frac{1}{N+1} < \delta$  となる.  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq N$  とすると,  $f_n$  の定義および仮定より,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 |1 - f(t)| dt &= \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\int_{\frac{1}{2}+\delta}^1 |1 - f(t)| dt = 0$$

である. したがって,  $\frac{1}{2} + \delta \leq t \leq 1$  のとき,  $f(t) = 1$  である. また,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} |0 - f(t)| dt &= \int_0^{\frac{1}{2}-\delta} |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\delta} |0 - f(t)| dt = 0$$

である. したがって,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \delta$  のとき,  $f(t) = 0$  である. 更に,  $\delta$  は任意だから,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < t \leq 1) \end{cases}$$

となる. これは  $f \in C[0, 1]$  であることに矛盾する.