§6. Ascoli-Arzelà の定理

Ascoli-Arzelà の定理は解析学における基本的な定理の一つである．まず, Ascoli-Arzelà の定理について述べるために必要となる言葉を用意しておこう．

定義 6.1 X を位相空間, S を $C(X)$ の空でない部分集合とする．ある $C > 0$ が存在し, 任意の $f, g \in S$ に対して,

$$d(f, g) \le C$$

となるとき, S は一様有界であるという．

定義 6.1 において, X がコンパクトな場合は次がなりたつ．

定理 6.1 X をコンパクト空間, S を $C(X)$ の空でない部分集合とすると, 次の (1), (2) は同値である．

(1) S は一様有界である．
(2) ある $K > 0$ が存在し, 任意の $f \in S$ および任意の $x \in X$ に対して, $|f(x)| \le K$.

証明 (1)⇒(2): 仮定より, ある $C > 0$ が存在し, 任意の $f, g \in S$ に対して,

$$d(f, g) \le C$$

となる．ここで, $f_0 \in S$ を任意に選んで固定しておく．このとき, $|f_0| \in C(X)$ を

$$|f_0|(x) = |f_0(x)| \quad (x \in X)$$

により定めることができる．更に, X はコンパクトだから, $|f_0|$ は最大値をもつ．よって, $f \in S$, $x \in X$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| \\ &\le C + \max\{|f_0(x)| \,|\, x \in X\} \end{aligned}$$

となる．したがって,

$$K = C + \max\{|f_0(x)| \,|\, x \in X\}$$

とおけばよい．
(2)⇒(1): 三角不等式を用いればよい． □

また, 次のように定める．

定義 6.2 X を位相空間, S を $C(X)$ の空でない部分集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $x \in X$ に対して, x のある近傍 U が存在し, 任意の $f \in S$ および任意の $y \in U$ に対して,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となるとき, S は同程度連続であるという．

更に, 距離空間の全有界性について思い出しておこう．

定義 6.3 X を距離空間とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ε 近傍からなる X の有限被覆が存在するとき, X は全有界であるという．

距離空間のコンパクト性や全有界性に関して, 次がなりたつ．

定理 6.2 X を距離空間とすると, 次の (1), (2) は同値である.

(1) X はコンパクトである.
(2) X は全有界かつ完備である.

それでは, Ascoli-Arzelà の定理について述べよう.

定理 6.3 (Ascoli-Arzelà の定理) $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクト空間, S を $C(X)$ の空でない部分集合とすると, 次の (1), (2) は同値である.

(1) $C(X)$ の一様収束位相に関して, $\overline{S}$ はコンパクトである.
(2) S は一様有界かつ同程度連続である.

証明 X はコンパクトだから, $C(X)$ の一様収束位相は距離 d から定まる位相に一致する. 更に, $C(X)$ は完備となるから, $\overline{S}$ も完備である. よって, 定理 6.2 より, (1) は次の (1)' と同値であることに注意する.

(1)' $\overline{S}$ は全有界である.

(1)'⇒(2): まず, $\overline{S}$ は全有界だから, ある f_1, f_2, $\ldots$, $f_n \in \overline{S}$ が存在し,

$$\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(f_i; 1\right)$$

となる. ここで, f, $g \in S$ とすると, ある i_1, $i_2 \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ が存在し,

$$f \in B(f_{i_1}; 1), \quad g \in B(f_{i_2}; 1)$$

となる. よって, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(f,g) &\leq d(f, f_{i_1}) + d(f_{i_1}, f_{i_2}) + d(f_{i_2}, g) \\ &< 2 + \max\{d(f_i, f_j) \,|\, 1 \leq i,\, j \leq n\} \end{aligned}$$

である. したがって, S は一様有界である.

次に, $\varepsilon > 0$ とする. $\overline{S}$ は全有界だから, ある g_1, g_2, $\ldots$, $g_m \in \overline{S}$ が存在し,

$$\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(g_i; \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

となる. ここで, $f \in S$ とすると, ある $i' \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}$ が存在し,

$$f \in B\left(g_{i'}; \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

となる. また, $x_0 \in X$ とし, x_0 の近傍 U を

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \left\{ x \in X \,\middle|\, |g_i(x) - g_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

により定める. $x \in U$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &\leq |f(x_0) - g_{i'}(x_0)| + |g_{i'}(x_0) - g_{i'}(x)| + |g_{i'}(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

である. よって, S は同程度連続である.
(2)⇒(1)': $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\mathfrak{U} = \left\{ (O, x) \in \mathfrak{O} \times X \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in O \text{ であり, 任意の } f \in S \text{ および任意} \\ \text{の } y \in O \text{ に対して, } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \end{array} \right\}$$

とおく. S は同程度連続だから,

$$\{O \,|\, (O, x) \in \mathfrak{U}\}$$

は X の開被覆である. 更に, X はコンパクトだから, ある (O_1, x_1), (O_2, x_2), …, $(O_n, x_n) \in \mathfrak{U}$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

となる. ここで, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ に対して,

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \left\{ f \in S \;\middle|\; \text{任意の } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対して, } \frac{\alpha_i}{4}\varepsilon \le f(x_i) \le \frac{\alpha_i + 1}{4}\varepsilon \right\}$$

とおく. X はコンパクトであり, S は一様有界だから, 定理 6.1 より, 空でない $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ は有限個である. これらを S_1, S_2, …, S_m とおくと,

$$S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j$$

である. 各 $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して, $f_j \in S_j$ を任意に選んで固定しておく. $x \in O_i$, $f \in S_j$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{3}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} d(f, f_j) &< \frac{3}{4}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となり,

$$\overline{S}_j \subset B(f_j; \varepsilon) \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \bigcup_{j=1}^{m} \bar{S}_j \\ &\subset \bigcup_{j=1}^{m} B(f_j; \varepsilon), \end{aligned}$$

すなわち, $\overline{S}$ は全有界である. □

問題 6

1. S を任意の元が C^1 級となる $C[0,1]$ の部分集合とし,

$$S' = \{f' \mid f \in S\}$$

とおく. S' が一様有界ならば, S は同程度連続であることを示せ.

2. $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ を連続関数, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\int_0^1 |f_n(s)|\, ds < 1 \quad (n \in \mathbf{N})$$

となる $C[0,1]$ の点列とする. このとき, $g_n \in C[0,1]$ を

$$g_n(t) = \int_0^1 K(s,t) f_n(s)\, ds \quad (t \in [0,1])$$

により定め, $S \subset C[0,1]$ を

$$S = \{g_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

により定める.
(1) S は一様有界であることを示せ.
(2) S は同程度連続であることを示せ.

3. X をコンパクト空間, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $C(X)$ の点列とし, $f \in C(X)$ とする. 更に, 次の (a), (b) がなりたつと仮定する.

(a) 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.
(b) 任意の $n \in \mathbf{N}$ および任意の $x \in X$ に対して, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

このとき, $S \subset C(X)$ を

$$S = \{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

により定める.
(1) S は一様有界であることを示せ.
(2) S は同程度連続であることを示せ. 更に, Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより, Dini の定理がなりたつことが分かる.

問題 6 の解答

1. まず, $[0,1]$ はコンパクトであり, S' は一様有界だから, 定理 6.1 より, ある $K>0$ が存在し, 任意の $f' \in S'$ $(f \in S)$ および任意の $u \in [0,1]$ に対して, $|f'(u)| \leq K$ である.

次に, $\varepsilon > 0$, $s \in [0,1]$ とする. このとき,

$$f \in S, \quad t \in [0,1], \quad |s-t| < \frac{\varepsilon}{K}$$

とすると,

$$\begin{aligned} |f(s)-f(t)| &= \left|\int_t^s f'(u)\,du\right| \\ &\leq \left|\int_t^s |f'(u)|\,du\right| \\ &\leq \left|\int_t^s K\,du\right| \\ &= K|s-t| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

である. よって, S は同程度連続である.

2. (1) $[0,1]\times[0,1]$ はコンパクトだから, $C \geq 0$ を

$$C = \max\{|K(s,t)| \mid (s,t) \in [0,1]\times[0,1]\}$$

により定めることができる. このとき, $n \in \mathbf{N}$, $t \in [0,1]$ とすると,

$$\begin{aligned} |g_n(t)| &= \left|\int_0^1 K(s,t)f_n(s)\,ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(s,t)f_n(s)|\,ds \\ &\leq C\int_0^1 |f_n(s)|\,ds \\ &\leq C \cdot 1 \\ &= C \end{aligned}$$

である. $[0,1]$ はコンパクトだから, 定理 6.1 より, S は一様有界である.

(2) K はコンパクト集合 $[0,1]\times[0,1]$ で定義された連続関数だから, 一様連続である. よって, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$(s,t),\ (s,u) \in [0,1]\times[0,1], \quad |t-u| < \delta$$

ならば,

$$|K(s,t)-K(s,u)| < \varepsilon$$

となる. このとき, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} |g_n(t)-g_n(u)| &= \left|\int_0^1 K(s,t)f_n(s)\,ds - \int_0^1 K(s,u)f_n(s)\,ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(s,t)-K(s,u)||f_n(s)|\,ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \int_0^1 |f_n(s)|\, ds \\
&< \varepsilon \cdot 1 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

である．したがって, S は同程度連続である．

3. (1) $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$ とすると, (a), (b) より,

$$
f_1(x) \leq f_n(x) \leq f(x)
$$

である．ここで, X はコンパクトだから, $K \geq 0$ を

$$
K = \max\{|f_1(x)|,\, |f(x)| \,|\, x \in X\}
$$

により定めることができる．よって,

$$
|f_n(x)| \leq K
$$

である．したがって, 定理 6.1 より, S は一様有界である．

(2) $\varepsilon > 0$, $x \in X$ とすると, (a), (b) より, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$
f(x) - f_n(x) < \frac{\varepsilon}{5}
$$

となる．また, f, $f_N \in C(X)$ だから, x のある近傍 U が存在し, $y \in U$ ならば,

$$
|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{5}
$$

となる．よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$, $y \in U$ のとき, (b) および三角不等式より,

$$
\begin{aligned}
f(y) - f_n(y) &\leq f(y) - f_N(y) \\
&\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} \\
&= \frac{3}{5}\varepsilon
\end{aligned}
$$

である．したがって, 三角不等式より,

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．また, f_1, f_2, $\ldots$, $f_{N-1} \in C(X)$ だから, x のある近傍 U' が存在し, $y \in U'$ ならば,

$$
|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1)
$$

となる．以上より, S は同程度連続である．