§11. Tietze の拡張定理

T_4 空間の閉集合で定義された実数値連続関数は全空間で定義された実数値連続関数に拡張することができる．これが Tietze の拡張定理である．

定義 11.1 X を位相空間, A を X の部分空間とし, $f \in C(A)$ とする．ある $g \in C(X)$ が存在し, 任意の $a \in A$ に対して, $g(a) = f(a)$ となるとき, g を f の X 上への拡張という．また, f は X 上へ拡張可能であるという．

例 11.1 $f \in C((0,1))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1))$$

により定めると, f は $\mathbf{R}$ 上へ拡張可能ではない．このことを背理法により示そう．

f の $\mathbf{R}$ 上への拡張 $g \in C(\mathbf{R})$ が存在すると仮定する．このとき, $h \in C([-1,1])$ を $h = g|_{[-1,1]}$ により定めることができる．h はコンパクト空間 $[-1,1]$ で定義された実数値連続関数となるが, 最大値をもたない．これは矛盾である．よって, f は $\mathbf{R}$ 上へ拡張可能ではない．

Tietze の拡張定理を証明するために必要な定理を用意しておこう．

定理 11.1 X を T_4 空間, A を X の空でない閉集合とする．更に, $m > 0$, $u \in C(A)$ とし, 任意の $a \in A$ に対して, $|u(a)| \leq m$ であるとする．このとき, ある $v \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対して,

$$|v(x)| \leq \frac{m}{3}, \quad |u(a) - v(a)| \leq \frac{2}{3}m$$

となる．

証明 $F, G \subset A$ を

$$F = \left\{ a \in A \;\middle|\; u(a) \geq \frac{m}{3} \right\}, \quad G = \left\{ a \in A \;\middle|\; u(a) \leq -\frac{m}{3} \right\}$$

により定める．このとき, F, G は互いに素である．また, A は X の閉集合であり, u は連続だから, F, G は X の閉集合である．更に, X は T_4 空間だから, Urysohn の補題より, ある $v \in C(X)$ が存在し,

$$v(X) \subset \left[-\frac{m}{3}, \frac{m}{3} \right], \quad v(F) = \left\{ \frac{m}{3} \right\}, \quad v(G) = \left\{ -\frac{m}{3} \right\}$$

となる．このとき, 任意の $a \in A$ に対して,

$$|u(a) - v(a)| \leq \frac{2}{3}m$$

である． □

定理 11.2 X を T_4 空間, A を X の空でない閉集合とする．更に, $f \in C(A)$ とし, 任意の $a \in A$ に対して, $|f(a)| \leq 1$ であるとする．このとき, 任意の $x \in X$ に対して, $|g(x)| \leq 1$ となる f の X 上への拡張 $g \in C(X)$ が存在する．

証明 まず, 定理 11.1 において $m = 1$, $u = f$ とすると, ある $g_1 \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対して,

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}, \quad |f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}$$

となる．ここで, $f_1 \in C(A)$ を

$$f_1(a) = f(a) - g_1(a) \quad (a \in A)$$

により定める. このとき, 任意の $a \in A$ に対して,

$$|f_1(a)| \leq \frac{2}{3}$$

である.

同様の操作を続けると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, ある $g_n \in C(X)$ および $f_n \in C(A)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対して,

$$|g_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}, \quad |f_n(a)| \leq \frac{2^n}{3^n}, \quad f_{n+1}(a) = f_n(a) - g_{n+1}(a) \tag{$*$}$$

となる.

ここで, $\varphi_n \in C(X)$ を

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$$

により定める. $x \in X$, $m \geq n$ とすると, $(*)$ の第 1 式より,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| &\leq \sum_{i=n+1}^{m} |g_i(x)| \\
&\leq \frac{2^n}{3^{n+1}} \frac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{m-n}}{1 - \dfrac{2}{3}} \\
&< \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

である. よって, 定理 3.1 の証明と同様に, $C(X)$ の点列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $g \in C(X)$ に一様収束することがわかる. また,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x)| &\leq \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{2}{3}} \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

だから,

$$|g(x)| \leq 1$$

である. 更に, $a \in A$ とすると, $(*)$ の第 3 式より,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(a) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \\
&= (f(a) - f_1(a)) + \sum_{i=2}^{n} (f_{i-1}(a) - f_i(a)) \\
&= f(a) - f_n(a)
\end{aligned}$$

である. したがって, $(*)$ の第 2 式より,

$$
\begin{aligned}
g(a) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(a) - f_n(a)) \\
&= f(a) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}
$$

である. □

それでは, Tietze の拡張定理を示そう.

定理 11.3 (Tietze の拡張定理) X を T_4 空間, A を X の空でない閉集合とする. このとき, $C(A)$ の任意の元は X 上へ拡張可能である.

証明 まず, $f \in C(A)$ とする. 関数 $\psi : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ を

$$\psi(t) = \frac{t}{1 + |t|} \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めると, ψ は同相写像となる. よって, $\psi \circ f \in C(A)$ であり, 任意の $a \in A$ に対して,

$$|(\psi \circ f)(a)| < 1$$

である. このとき, 定理 11.2 より, ある $g \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対して,

$$|g(x)| \leq 1, \quad g(a) = (\psi \circ f)(a)$$

となる. ここで,

$$B = \{x \in X \mid |g(x)| = 1\}$$

とおくと, A, B は互いに素である. また, g は連続だから, B は X の閉集合である. 更に, A は X の閉集合であり, X は T_4 空間だから, Urysohn の補題より, ある $h \in C(X)$ が存在し,

$$h(X) \subset [0, 1], \quad h(A) = \{1\}, \quad h(B) = \{0\}$$

となる. 次に, $k \in C(X)$ を

$$k(x) = g(x)h(x) \quad (x \in X)$$

により定める. このとき, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対して,

$$|k(x)| < 1, \quad k(a) = (\psi \circ f)(a)$$

である. 更に, $l \in C(X)$ を

$$l = \psi^{-1} \circ k$$

により定める. このとき, 任意の $a \in A$ に対して,

$$l(a) = f(a)$$

である. したがって, l は f の X 上への拡張である. 以上より, $C(A)$ の任意の元は X 上へ拡張可能である. □

問題 11

1. $\mathbf{S}$ を問題 10-1 の Sorgenfrey 直線, すなわち, $\mathbf{S} = (\mathbf{R}, \mathfrak{O})$ とする．このとき, 積空間 $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ を Sorgenfrey 平面という．

(1) $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は可分であることを示せ．

(2) 空でない集合 X, Y に対して, X と Y の濃度が等しいことを $X \sim Y$ と表す．また, X から Y への写像全体の集合を $F(X, Y)$ と表す．このとき, 次の (a), (b) がなりたつことが分かる．

(a) X, Y, X', Y' が空でない集合であり, $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ ならば, $F(X, Y) \sim F(X', Y')$.

(b) X, Y, Z が空でない集合ならば, $F(X \times Y, Z) \sim F(X, F(Y, Z))$.

(a), (b) を用いることにより, $C(\mathbf{S} \times \mathbf{S}) \sim \mathbf{R}$ であることを示せ．

(3) $\Delta \subset \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ を

$$\Delta = \{(x, -x) \,|\, x \in \mathbf{R}\}$$

により定める．Δ は $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ の閉集合であることを示せ．

(4) $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ の部分空間 Δ の位相は離散位相であることを示せ．

(5) $C(\Delta) \sim 2^{\mathbf{R}}$ であることを示せ．

(6) $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は T_4 空間ではないことを示せ．特に, $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は正規ではない．

2. 2 つの T_3 空間の積空間は T_3 空間であることを示せ．

問題 11 の解答

1. (1) まず, $\mathbf{Q}$ は可算だから, $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ は可算である．また, 問題 10-1 より, $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{S}$ である．よって,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}&=\overline{\mathbf{Q}}\times\overline{\mathbf{Q}}\\&=\mathbf{S}\times\mathbf{S}\end{aligned}$$

となる．したがって, $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ は $\mathbf{S}$ の可算な稠密部分集合となり, $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$ は可分である．

(2) $f, g\in C(\mathbf{S}\times\mathbf{S})$ とする．(1) より, 任意の $(x,y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ に対して, $f(x,y)=g(x,y)$ ならば, $f=g$ である．よって, 定義域を $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ に制限することにより, $C(\mathbf{S}\times\mathbf{S})$ から $F(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\mathbf{R})$ への単射を定めることができる．ここで, (a), (b) より,

$$\begin{aligned}F(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\mathbf{R})&\sim F(\mathbf{Q},\mathbf{R})\\&\sim F(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})\\&\sim F(\mathbf{N},F(\mathbf{N},\{0,1\}))\\&\sim F(\mathbf{N}\times\mathbf{N},\{0,1\})\\&\sim F(\mathbf{N},\{0,1\})\\&\sim 2^{\mathbf{N}}\\&\sim\mathbf{R},\end{aligned}$$

すなわち,

$$F(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q},\mathbf{R})\sim\mathbf{R}$$

となるから, $C(\mathbf{S}\times\mathbf{S})$ から $\mathbf{R}$ への単射が存在する．一方, 定数関数を考えると, $\mathbf{R}$ から $C(\mathbf{S}\times\mathbf{S})$ への単射が存在する．したがって, Bernstein の定理より, $C(\mathbf{S}\times\mathbf{S})\sim\mathbf{R}$ である．

(3) まず,

$$(x,y)\in(\mathbf{S}\times\mathbf{S})\setminus\Delta$$

とする．このとき, $x+y\neq 0$ である．

$x+y>0$ のとき,

$$(x',y')\in[x,x+1)\times[y,y+1)$$

とする．このとき, $x'+y'>0$ となり,

$$(x',y')\in(\mathbf{S}\times\mathbf{S})\setminus\Delta$$

である．よって, (x,y) は $(\mathbf{S}\times\mathbf{S})\setminus\Delta$ の内点である．

$x+y<0$ のとき,

$$x+y=-\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$$

とおき,

$$(x',y')\in\left[x,x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\times\left[y,y+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

とする．このとき,

$$\begin{aligned}x'+y'&<x+\frac{\varepsilon}{2}+y+\frac{\varepsilon}{2}\\&=0,\end{aligned}$$

すなわち, $x'+y'<0$ となり,

$$(x', y') \in (\mathbf{S} \times \mathbf{S}) \setminus \Delta$$

である．よって，(x, y) は $(\mathbf{S} \times \mathbf{S}) \setminus \Delta$ の内点である．

したがって，$(\mathbf{S} \times \mathbf{S}) \setminus \Delta$ は X の開集合となるから，Δ は X の閉集合である．

(4) $x \in \mathbf{R}$ とする．このとき，

$$(x, -x) = ([x, x+1) \times [-x, -x+1)) \cap \Delta$$

である．よって，$\{(x, -x)\}$ は Δ の開集合である．したがって，Δ の位相は離散位相である．

(5) まず，Δ の定義より，$\Delta \sim \mathbf{R}$ である．更に，(4) より，

$$\begin{aligned} C(\Delta) &\sim F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ &\sim F(\mathbf{R}, F(\mathbf{N}, \{0, 1\})) \\ &\sim F(\mathbf{R} \times \mathbf{N}, \{0, 1\}) \\ &\sim F(\mathbf{R}, \{0, 1\}) \\ &\sim 2^{\mathbf{R}}, \end{aligned}$$

すなわち，$C(\Delta) \sim 2^{\mathbf{R}}$ である．

(6) 背理法により示す．

$\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ が T_4 空間であると仮定する．(3) より，Δ は $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ の閉集合である．よって，Tietze の拡張定理より，$f \in C(\Delta)$ とすると，f の $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ 上への拡張 $g \in C(\mathbf{S} \times \mathbf{S})$ が存在する．このとき，f から g への対応は $C(\Delta)$ から $C(\mathbf{S} \times \mathbf{S})$ への単射を定める．(2), (5) および Cantor の定理より，これは矛盾である．よって，$\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ は T_4 空間ではない．

2. X, Y を T_3 空間とする．$(x, y) \in X \times Y$ とし，U を (x, y) の近傍とすると，積位相の定義より，X のある開集合 O_x および Y のある開集合 O_y が存在し，

$$(x, y) \in O_x \times O_y \subset U$$

となる．ここで，X は T_3 空間だから，x の閉近傍全体の集合は x の基本近傍系となる．よって，X のある開集合 O'_x が存在し，

$$x \in O'_x, \quad \overline{O'_x} \subset O_x$$

となる．同様に，Y のある開集合 O'_y が存在し，

$$y \in O'_y, \quad \overline{O'_y} \subset O_y$$

となる．このとき，$(x, y) \in O'_x \times O'_y$ である．また，

$$\begin{aligned} \overline{O'_x \times O'_y} &= \overline{O'_x} \times \overline{O'_y} \\ &\subset O_x \times O_y \end{aligned}$$

となるから，

$$\overline{O'_x \times O'_y} \subset O_x \times O_y$$

である．したがって，(x, y) の閉近傍全体の集合は (x, y) の基本近傍系となるから，$X \times Y$ は T_3 空間である．すなわち，2 つの T_3 空間の積空間は T_3 空間である．