

§2. ノルム空間

ノルム空間は距離空間の例となる. ここでは, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考え, 次のように定めよう.

定義 2.1 V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. 関数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}$ が任意の $x, y \in V$ に対して, 次の (1)~(3) をみたすとき, $\|\cdot\|$ を V のノルム, $\|x\|$ を x のノルムという. また, 組 $(V, \|\cdot\|)$ または単に V をノルム空間という.

- (1) 任意の $x \in V$ に対して, $\|x\| \geq 0$ であり, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る. (正値性)
- (2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x \in V$ に対して, $\|cx\| = |c|\|x\|$.
- (3) 任意の $x, y \in V$ に対して, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (三角不等式)

例 2.1 (内積空間) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とし, 関数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in V)$$

により定める. このとき, $\|\cdot\|$ は V のノルムとなる. すなわち, $(V, \|\cdot\|)$ はノルム空間である.

注意 2.1 内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ から定められるノルム $\|\cdot\|$ に関して, 中線定理

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

がなりたつ.

逆に, $(V, \|\cdot\|)$ を中線定理がなりたつノルム空間とする. このとき, 関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (x, y \in V)$$

により定めると, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V の内積となり, 更に, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から定められるノルムは $\|\cdot\|$ であることが分かる.

例 2.2 有界閉区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[0, 1]$ と表すことにする. $f, g \in C[0, 1]$ とすると, f と g の和 $f + g \in C[0, 1]$ を

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる. 更に, $c \in \mathbf{R}$ とすると, f の c によるスカラー倍 $cf \in C[0, 1]$ を

$$(cf)(t) = cf(t) \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる. このとき, $C[0, 1]$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる.

ここで, 関数 $\|\cdot\| : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \quad (f \in C[0, 1])$$

により定めることができる. このとき, $\|\cdot\|$ は $C[0, 1]$ のノルムとなることが分かる. すなわち, $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ はノルム空間である.

次の定理より, ノルム空間は距離空間となる.

定理 2.1 $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし, 関数 $d : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める. このとき, d は V の距離となる. すなわち, (V, d) は距離空間である.

証明 次の (1)~(3) がなりたつことを示せばよい.

- (1) 任意の $x, y \in V$ に対して, $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る.
- (2) 任意の $x, y \in V$ に対して, $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) 任意の $x, y, z \in V$ に対して, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(1): ノルムの正值性より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である. また, $d(x, y) = 0$ となるのは

$$\|x - y\| = 0$$

となるとき, すなわち, $x - y = 0$ より, $x = y$ のときに限る.

(2): 定義 2.1 の (2) より,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1| \|y - x\| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

である. すなわち, (2) がなりたつ.

(3): ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

である. すなわち, (3) がなりたつ. □

以下, ノルム空間に対しては, 定理 2.1 の距離から定められる位相を考える. 例えば, ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in V$ に収束するとは,

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

がなりたつことである. このとき, 直積距離空間 $V \times V$ を考えることができる. また, $\mathbf{R}$ の Euclid 距離を考えると, 直積距離空間 $\mathbf{R} \times V$ を考えることができる. 更に, 次がなりたつ.

定理 2.2 $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とすると, 次の (1)~(3) がなりたつ.

- (1) 和が定める写像 $V \times V \rightarrow V$ は連続である.
- (2) スカラー倍が定める写像 $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$ は連続である.
- (3) 関数 $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}$ は連続である.

証明 (1): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする. また, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $y \in V$ に収束する V の点列とする. ノルムに対する三角不等式より, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \\ &\rightarrow 0 + 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. よって, (1) がなりたつ.

(2): $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $c \in \mathbf{R}$ に収束する $\mathbf{R}$ の点列とする. また, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする. ノルムの性質より, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\|c_n x_n - cx\| &= \|(c_n - c)(x_n - x) + (c_n - c)x + c(x_n - x)\| \\ &\leq \|(c_n - c)(x_n - x)\| + \|(c_n - c)x\| + \|c(x_n - x)\| \\ &= |c_n - c| \|x_n - x\| + |c_n - c| \|x\| + |c| \|x_n - x\| \\ &\rightarrow 0 \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| + |c| \cdot 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$c_n x_n \rightarrow cx \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. よって, (2) がなりたつ.

(3): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $x \in V$ に収束する V の点列とする. まず, ノルムに対する三角不等式より,

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|x + (x_n - x)\| \\ &\leq \|x\| + \|x_n - x\|,\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

である. 同様に,

$$\|x\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x\|$$

である. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}||x_n\| - \|x\|| &\leq \|x_n - x\| \\ &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

すなわち,

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\| \quad (n \rightarrow \infty)$$

である. したがって, (3) がなりたつ. □

問題 2

1. $p \geq 1$ とする.

(1) $a, b \in \mathbf{R}$ とすると, 不等式

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

がなりたつことを示せ.

(2) 集合 l^p を

$$l^p = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \text{ となる実数列} \right\}$$

により定め, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ とする. 実数列 $x + y$ を

$$x + y = \{\xi_n + \eta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $x + y \in l^p$ であることを示せ.

更に, $c \in \mathbf{R}$ とし, 実数列 cx を

$$cx = \{c\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $cx \in l^p$ となり, l^p は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる. l^p を数列空間という.

(3) $p > 1$ とし, $q > 1$ を

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (*)$$

により定める. $a, b > 0$ とすると, 不等式

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

がなりたつことを示せ.

(4) $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ に対して,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく.

$p > 1$ とし, $q > 1$ を (*) により定める. $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p, y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$ とすると, 不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

がなりたつことを示せ. この不等式を Hölder の不等式という.

(5) $\|\cdot\|_p$ は三角不等式をみたすこと示せ. この三角不等式を Minkowski の不等式という.

更に, $\|\cdot\|_p$ は l^p のノルムとなることが分かる. すなわち, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ はノルム空間である.

問題 2 の解答

1. (1) $t \geq 0$ のとき, 関数 t^p は下に凸である. よって,

$$\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right)^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2},$$

すなわち,

$$(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

である. したがって, 絶対値に対する三角不等式と合わせると, あたえられた不等式がなりたつ.

(2) $x, y \in l^p$ および (1) より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{p-1}(|\xi_n|^p + |\eta_n|^p) \\ &= 2^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p + 2^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \\ &< +\infty \end{aligned}$$

である. よって, $x + y \in l^p$ である.

(3) $t > 0$ のとき, 関数 $\log t$ は上に凸である. よって,

$$\frac{\frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \leq \log \frac{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}},$$

すなわち,

$$\log a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \log \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right)$$

である. よって, あたえられた不等式がなりたつ.

(4) まず, $x = 0$, すなわち, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\xi_n = 0$ のとき, Hölder の不等式がなりたつ. 同様に, $y = 0$ のとき, Hölder の不等式がなりたつ.

次に, $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とする. このとき, $\|x\|_p > 0$, $\|y\|_q > 0$ であることに注意し, $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$a_n = \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b_n = \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

とおく. (3) より,

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p} \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

である. $m \in \mathbf{N}$ とすると, 絶対値に対する三角不等式より,

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left| \sum_{n=1}^m \xi_n \eta_n \right| \leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum_{n=1}^m |\xi_n|^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \sum_{n=1}^m |\eta_n|^q$$

である. よって, $m \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり, Hölder の不等式がなりたつ.

(5) $p = 1$ のとき, 絶対値に対する三角不等式より, Minkowski の不等式がなりたつ.

$p > 1$ のとき, $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ とする. $x + y = 0$ のとき, Minkowski の不等式がなりたつ. $x + y \neq 0$ のとき, $q > 1$ を (*) により定めると, 絶対値に対する三角不等式および Hölder の不等式より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1} |\xi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^{p-1} |\eta_n| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

である. ここで, $x + y \neq 0$ より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p > 0$$

である. よって, Minkowski の不等式がなりたつ.