## §5. Dini の定理

問題 4-2 に現れた $C[0,1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を思い出そう. すなわち,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ (n+1)\left(t - \frac{1}{2}\right) & (\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}), \\ 1 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} < t \leq 1) \end{cases}$$

である. 各 $t \in [0,1]$ に対して, 実数列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < t \leq 1) \end{cases}$$

となるが, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C[0,1]$ の元には一様収束しない.

また, 次のような例を考えることもできる.

**例 5.1** $C[0,1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(t) = \begin{cases} (n+1)t & (0 \leq t \leq \frac{1}{n+1}), \\ 2 - (n+1)t & (\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{2}{n+1}), \\ 0 & (\frac{2}{n+1} < t \leq 1) \end{cases}$$

により定める. このとき, 各 $t \in [0,1]$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

であるが, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C[0,1]$ の元である 0 には一様収束しない. 実際, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} d(f_n, 0) &= \sup\{|f_n(t) - 0| \,|\, t \in [0,1]\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるからである.

実数値連続関数全体の集合の点列に関する一様収束性については, 次がなりたつ.

**定理 5.1 (Dini の定理)** $X$ をコンパクト空間, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $C(X)$ の点列とし, $f \in C(X)$ とする. 次の (1), (2) がなりたつならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束する.

(1) 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(2) 任意の $n \in \mathbf{N}$ および任意の $x \in X$ に対して, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

**証明** $\varepsilon > 0$ とする. (1), (2) より, $x \in X$ に対して, ある $N(x) \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$0 \leq f(x) - f_{N(x)}(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる. また, $f \in C(X)$ より, $f$ は $x$ で連続だから, $x$ のある開近傍 $U_1(x)$ が存在し, $y \in U_1(x)$ ならば,

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる. 同様に, $x$ のある開近傍 $U_2(x)$ が存在し, $y \in U_2(x)$ ならば,

$$|f_{N(x)}(y) - f_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる. ここで,

$$U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$$

とおくと, $U(x)$ は $x$ の開近傍である. 更に, $y \in U(x)$ とすると,

$$\begin{aligned} |f(y) - f_{N(x)}(y)| &\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{N(x)}(x)| + |f_{N(x)}(x) - f_{N(x)}(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f(y) - f_{N(x)}(y)| < \varepsilon \qquad (*)$$

である.

ここで, $(U(x))_{x \in X}$ は $X$ の開被覆であり, $X$ はコンパクトだから, $(U(x))_{x \in X}$ の有限部分被覆が存在する. すなわち, ある $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$$

となる. このとき,

$$N = \max\{N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_k)\}$$

とおく. $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ とし, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ を $x \in U(x_i)$ となるように選んでおくと, (1), (2) および $(*)$ より,

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) - f_n(x) \\ &= (f(x) - f_{N(x_i)}(x)) + (f_{N(x_i)}(x) - f_n(x)) \\ &\leq (f(x) - f_{N(x_i)}(x)) + 0 \\ &= f(x) - f_{N(x_i)}(x) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

すなわち,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

である. よって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束する. □

**注意 5.1** Dini の定理において, 関数を $-1$ 倍することを考えると, (2) の条件は

(2)' 任意の $n \in \mathbf{N}$ および任意の $x \in X$ に対して, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

に置き換えてもよい.

Dini の定理はコンパクト性と関係が深い有限交叉性を用いて示すこともできる. $X$ を空でない集合, $\mathfrak{A}$ を $X$ の部分集合系とする. 任意の $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ に対して, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ となるとき, $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもつというのであった. 更に, 次がなりたつ.

**定理 5.2** $X$ を位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値である.

(1) $X$ はコンパクトである.

(2) $\mathfrak{A}$ を $X$ の閉集合からなる任意の集合系とする. $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつならば, $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A \neq \emptyset$ である.

それでは, 定理 5.2 を用いて, Dini の定理の別証明を与えよう.

**Dini の定理の別証明** $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X \mid f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\}$$

とおく. $f_n$, $f \in C(X)$ だから, $A(\varepsilon, n)$ は $X$ の閉集合である. ここで, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$A(\varepsilon, n) \neq \emptyset$$

であると仮定する. $x \in A(\varepsilon, n+1)$ とすると, (2) より,

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq f_{n+1}(x) \\ &\leq f(x) - \varepsilon \end{aligned}$$

となるから, $x \in A(\varepsilon, n)$ となり,

$$A(\varepsilon, n+1) \subset A(\varepsilon, n) \qquad (*)$$

である. よって, $X$ の部分集合族

$$\{A(\varepsilon, n) \mid n \in \mathbf{N}\}$$

は有限交叉性をもつ. したがって, 定理 5.2 より, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\varepsilon, n)$ が存在する. このとき, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$f_n(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon$$

である. 更に, $n \to \infty$ とすると, (1) より,

$$f(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon,$$

すなわち, $\varepsilon \leq 0$ となり, これは矛盾である.

以上より, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$A(\varepsilon, N) = \emptyset$$

となる. $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ とすると, $(*)$ より,

$$A(\varepsilon, n) = \emptyset,$$

すなわち, 任意の $x \in X$ に対して,

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x)$$

である. また, (1), (2) より,

$$f_n(x) \leq f(x)$$

である. 上の 2 つの式を合わせると, $f_n \in B(f; \varepsilon)$ である. すなわち, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束する. □

## 問題 5

**1.** $n \in \mathbf{N}$ に対して, 有界開区間 $(0,1)$ で定義された関数 $f_n : (0,1) \to \mathbf{R}$ を

$$f_n(t) = t^n \quad (t \in (0,1))$$

により定める.

(1) 任意の $t \in (0,1)$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_{n+1}(t) < f_n(t)$ であることを示せ.

(2) $(0,1)$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(0,1)$ と表すことにする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C(0,1)$ の点列を定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C(0,1)$ の元には一様収束しないことを示せ.

**2.** $n \in \mathbf{N}$ に対して, 関数 $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ を

$$\begin{cases} f_1(t) = 1, \\ f_{n+1}(t) = \sqrt{t f_n(t)} \end{cases} \qquad (t \in [0,1])$$

により定める.

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C[0,1]$ の点列となることを示せ.

(2) 任意の $t \in [0,1]$ に対して,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

となる $f \in C[0,1]$ が存在する. $f$ を求めよ.

(3) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束することを示せ.

**3.** $n \in \mathbf{N}$ に対して, 関数 $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ を

$$\begin{cases} f_1(t) = 0, \\ f_{n+1}(t) = f_n(t) + \dfrac{t - (f_n(t))^2}{2} \end{cases} \qquad (t \in [0,1])$$

により定める.

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C[0,1]$ の点列となることを示せ.

(2) 任意の $t \in [0,1]$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ であることを示せ.

(3) 任意の $t \in [0,1]$ に対して,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

となる $f \in C[0,1]$ が存在する. $f$ を求めよ.

なお, (2) と合わせると, Dini の定理より, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束する.

## 問題 5 の解答

**1.** (1) $t \in (0,1)$ より,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) - f_n(t) &= t^{n+1} - t^n \\ &= t^n(t-1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

である. よって, 題意がなりたつ.

(2) 背理法により示す.

ある $f \in C(0,1)$ が存在し, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f$ に一様収束すると仮定する. このとき, $t \in (0,1)$, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq d(f_n, f)$$

である. 更に, $n \to \infty$ とすると, $f_n$ の定義より,

$$|f(t)| \leq 0$$

となる. よって, $f = 0$ である. したがって,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sup\{|f_n(t) - f(t)| \,|\, t \in (0,1)\} \\ &= \sup\{|t^n| \,|\, t \in (0,1)\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる. これは $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f$ に一様収束することに矛盾する.

**2.** (1) 任意の $t \in [0,1]$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$f_n(t) = t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

がなりたつことを示せばよい. この等式を $n$ に関する数学的帰納法により示す.

$n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} t^{1-\frac{1}{2^{1-1}}} &= t^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり, 上の等式がなりたつ.

$n = k$ ($k \in \mathbf{N}$) のとき, 上の等式がなりたつと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t) &= \sqrt{t f_k(t)} \\ &= \sqrt{t \cdot t^{1-\frac{1}{2^{k-1}}}} \\ &= t^{1-\frac{1}{2^k}} \\ &= t^{1-\frac{1}{2^{(k+1)-1}}} \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のとき, 上の等式がなりたつ.

よって, 任意の $t \in [0,1]$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, 上の等式がなりたつ.

(2) (1) より,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \lim_{n\to\infty} t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= t \end{aligned}$$

である. よって, $f \in C[0,1]$ は $f(t) = t$ によりあたえられる.

(3) (1) および $t \in [0,1]$ より,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) - f_n(t) &= t^{1-\frac{1}{2^n}} - t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}(t^{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}} - 1) \\ &= t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}(t^{\frac{1}{2^n}} - 1) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

すなわち,

$$f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

である. よって, (2) と合わせると, Dini の定理より, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $f$ に一様収束する.

**3.** (1) $f_n$ の定義より, $f_n$ は $t$ の実数係数多項式である. よって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $C[0,1]$ の点列となる.

(2) まず, 任意の $t \in [0,1]$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{t} \qquad (*)$$

がなりたつことを $n$ に関する数学的帰納法により示す.

$n = 1$ のとき, $f_1$ の定義より, 上の不等式がなりたつ.

$n = k$ $(k \in \mathbf{N})$ のとき, $(*)$ がなりたつと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t) &= f_k(t) + \frac{t - (f_k(t))^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(f_k(t) - 1)^2 + \frac{t+1}{2} \end{aligned}$$

および仮定より,

$$0 \leq f_{k+1}(t) \leq \sqrt{t}$$

である. よって, $n = k+1$ のとき, $(*)$ がなりたつ.

したがって, 任意の $t \in [0,1]$ および任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $(*)$ がなりたつ.

更に, $f_n$ の定義および $(*)$ より, (2) がなりたつ.

(3) (2) より, 実数列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である. よって, $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, 関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ を

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

により定めることができる.

$n \to \infty$ とすると, $f_n$ の定義および $(*)$ より,

$$f(t) = \sqrt{t}$$

である. 更に, $f \in C[0,1]$ となる.